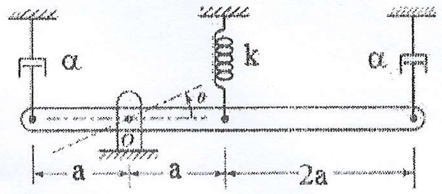
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Examen Final, le Mardi 22 Mai 2018

Exercice n°1 (05 points): Système à un degrè de liberté libre

Une tige rigide, homogène, de masse m = 10kg, de longueur L = 4a, peut pivoter librement dans le plan vertical autour d'un axe passant par O. Ecartée de sa position d'équilibre ($\theta = 0°$), la tige se met à osciller.



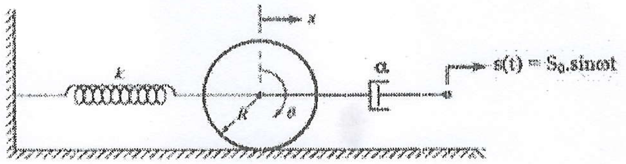
1- Etablir l'équation différentielle du mouvement du système repéré par la coordonnée angulaire θ en précisant les expressions du facteur d'amortissement δ et de la pulsation propre ω_0.

2- On suppose qu'au bout de 4 pseudo-périodes, l'amplitude initiale de vibrations est divisée par dix. Si la période d'oscillations est égale à 0,6 s, calculer la valeur du coefficient de frottement α, ainsi que celle de la constante de raideur k du ressort.

3- Calculer le coefficient de frottement de l'amortisseur qui permettra à la tige de revenir le plus rapidement possible à l'équilibre (régime critique).

Exercice n°2 (05 points): Système à un degré de liberté forcé

Le système mécanique représenté sur la figure est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R pouvant rouler sans glisser sur un plan horizontal. Son mouvement est repéré par le déplacement x(t) de son centre de masse par rapport à sa position d'équilibre. Un déplacement sinusoïdal s(t) agit à l'extrémité de l'amortisseur de coefficient α.



1- Etablir l'équation différentielle du mouvement du système et préciser les expressions du facteur d'amortissement δ et de la pulsation propre ω_0.

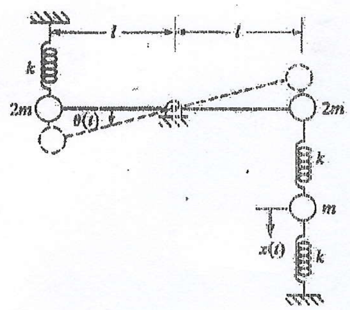
2- Donner la réponse totale du système correspondant aux valeurs calculées de δ et de ω_0.

3- En régime permanent, donner l'expression de l'amplitude des vibrations en fonction de S_0, δ, ω_0 et ω. En déduire l'expression de la réponse du système pour $\omega = \omega_0$.

On donne M = 10kg, α = 1800kg/s, k = 5400N/m.

Exercice n°3 (5 points) : Système libre à deux degrés de liberté

Une barre rigide de masse négligeable et de longueur 2 ℓ peut pivoter autour de son centre. Cette barre supporte à ses extrémités des masses de valeur (2m) attachées à des supports et une masse m comme le montre l'assemblage de la figure ci-contre, trouver :



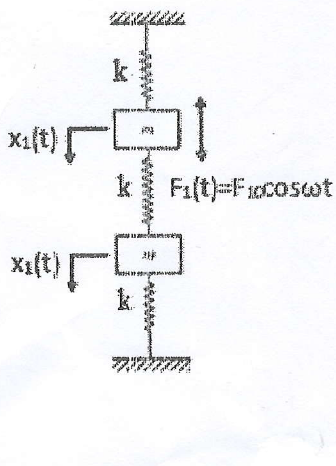
1- Les équations différentielles du mouvement du système.

2- Les pulsations propres ω_1 et ω_2.

3- La valeur des rapports d'amplitude et les vecteurs propres ou modes propres que l'on notera $\vec{X}^{(1)}$ et $\vec{X}^{(2)}$.

Exercice n°4 (05 points) : Réponse stationnaire d'un système masse-ressort

1. Ecrire les équations différentielles du mouvement de la figure ci-contre et mettre les deux équations sous forme matricielle.
2. En supposant une solution de la forme :
   $x_j(t) = X_j \cos\omega t \quad ; \quad j = 1,2$
   Trouver les modules $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$.
3. Donnez la pulsation d'anti-résonnance et les deux pulsations de résonance.



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Solution de l'Examen Final, le 05 Janvier 2017

2

Exercice n°1 : Système à un degré de liberté libre

0 ,5 point

1. $L = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(a\theta)^2$ avec $J = \frac{m(4a)^2}{12} + ma^2 = \frac{7}{3}ma^2$

0 ,5 point

et $D = \frac{1}{2}\alpha\left(3a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha\left(a\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha(10a^2)\dot{\theta}^2$

Equation du mouvement :

1 point

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \text{ i.e } \frac{7ma^2}{3}\ddot{\theta} + 10a^2\alpha\dot{\theta} + ka^2\theta = 0 \text{ ou } \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ avec } \begin{cases} \delta = \dfrac{15\alpha}{7m} \\ \omega_0^2 = \dfrac{3k}{7m} \end{cases}$$

2. $d = \frac{1}{4}Ln\frac{0.1}{0.01} = 0.576 = \delta T_a$ avec $T_a = 0.6s$

$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2$

1 point

$\delta = \frac{d}{T_a}$ et $\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + \left(\frac{d}{T_a}\right)^2$;

1 point

AN : $\delta = 0.96s^{-1}$ et $\omega_0 \approx 10.52\, rd/s$ i.e α=4,47kg/s et k≈2614N/m

3. $\alpha = \alpha_c$ tel que $\delta = \omega_0$

1 point

$\alpha_c = \frac{\sqrt{21km}}{15}$

AN : $\alpha_c = 49.1$kg/s

Exercice n°2 : Système à un degré de liberté forcé

0,5 point

1. $L = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ avec $J = \frac{MR^2}{2}$ et $x = R\theta$

0,5 point

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ et $D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x} - \dot{s})^2$

Equation différentielle du mouvement : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$ i.e $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 cos(\omega t)$

1 point

Avec $\delta = \frac{\alpha}{3M}$, $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M}$ et $A_0 = \frac{2\alpha\omega}{3M}S_0$

2. La solution générale :

1 point

Avec $\delta = 6s^{-1}$ et $\omega_0 = \cancel{6}rd/s$; $x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-6t} + X_0(\omega)sin(\omega t + \Phi(\omega))$

18,97

0,5 point

$$\text{avec } \begin{cases} X_0(\omega) = \dfrac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ \Phi(\omega) = -\text{arctg}\dfrac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \end{cases}$$

0,5 point

3. En régime permanent : $x(t) = X_0(\omega).\cos(\omega t + \Phi(\omega))$

Pour $\omega = \omega_0$:

1 point

$X(\omega_0) = S_0$ et $\Phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$rd $\qquad x(t) = S_0.\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

(2)

Exercice n°3 (5 points) :

1- Les équations du mouvement : $4m\ell^2\ddot{\theta} + k\ell^2\theta + k\ell(\ell\theta - x) = 0$; $m\ddot{x} + kx + k(\ell\theta - x) = 0$
i.e $4m\ell\ddot{\theta} + 2k\ell\theta - kx = 0$; $m\ddot{x} + 2kx - k\ell\theta = 0$ **(1 point)**

2- Ces équations donnent : $\begin{bmatrix} -4m\ell\omega^2 + 2k\ell & -k \\ -k\ell & -m\omega^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

L'équation des fréquences est : $4m^2\omega^4 - 10km\omega^2 + 3k^2 = 0$ donne $\omega^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{13}}{4}\right) = \left(0{,}3486\frac{k}{m}\ ;\ 2{,}154\frac{k}{m}\right)$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0{,}5904\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ \omega_2 = 1{,}4668\sqrt{\frac{k}{m}}$$ **(2 points)**

3- Les rapports d'amplitude $r_1 = \frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = \frac{-4m\ell^2\omega_1^2 + 2k\ell^2}{-k\ell} = -0{,}6057\ell$; $r_2 = \frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = \frac{-4m\ell^2\omega_2^2 + 2k\ell^2}{-k\ell} = 6{,}6060\ell$

4- Les modes propres sont : $\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \Theta^{(1)} \\ X^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}6057\ell \end{Bmatrix}\Theta^{(1)}$; $\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \Theta^{(2)} \\ X^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6{,}6060\ell \end{Bmatrix}\Theta^{(2)}$ **(2 points)**

Exercice n°4 :

1- Equations du mouvement

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_{10}\cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$ **(2 points)**

2- que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10}\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$ **(2 points)**

On suppose une solution de la forme : $x_j(t) = X_j\cos\omega t$; $j = 1,2$

Qui nous donne les composantes de la matrice impédance :

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k\ ,\ Z_{12}(\omega) = -k$$

Nous obtenons X_1 et X_2 à partir des composantes de l'inverse de la matrice impédance

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$$X_2(\omega) = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$ sont les carrés des pulsations de résonance.

Le carré de la pulsation d'antirésonance est donné par $\omega^2 = \frac{2k}{m}$ **(1 point)**