Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Physique 3 (VOM)

Solution du Rattrapage, le 7 Juin 2018.

Exo 1 :

1.5 points

1- $T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$ avec $J_0 = \frac{mL^2}{3}$ (0.5) et $U = \frac{1}{2}k\frac{5L^2}{4}$ (0.5)

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{5mL^2}{6}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{5kL^2}{4}\right)\theta^2.$ et $D_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta}^2.$ (0.5)

1.5 points

2- $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ (1) avec $\omega_0^2 = \frac{3k}{2m}$ et $2\delta = \frac{3\alpha}{10m}$. (0.5)

2 points

3- $\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_A t + \varphi)$ $avec$ $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (1)

A.N $\theta(t) = 0.632\, e^{-0.012t}\cos(15.8t - \pi/2)$ (1)

Exo 2 :

1.5 points

1) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x-s)^2,$ (0.5) (0.5) $D_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2.$ (0.5)

1.5 points

2) $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x + 2\delta\dot{x} = \omega_0^2 s_0\cos(\omega t)$ (1) avec $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (0.5)

2 points

3) $x(t) = X\cos(\omega t + \Phi)$ (0.5) avec $X = \frac{s_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4(\delta\omega)^2}}$ (0.5) et $\Phi = -\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$ (0.5)

Pour $\omega = \omega_0$ on aura $X(\omega_0) = \frac{s_0\omega_0^2}{2(\delta\omega_0)} = s_0 Q.$ (0.5)

Exo 3 :

1.5 points

1) $T = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$ (0.5) $U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{4}{2}k_0(x_2 - x_1)^2.$ (0.5)

$L = \frac{3m}{4}[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \Omega^2(x_1^2 + x_2^2 - 2Kx_1x_2)]$

Avec $\Omega^2 = \frac{2(k+4k_0)}{3m}$ et $K = \frac{4k_0}{k+4k_0}$ (0.5)

1 point

2) Les équations du mouvement :

$$\begin{cases}\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 - \Omega^2 K x_2 = 0 & (0.5)\\ \ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 - \Omega^2 K x_1 = 0 & (0.5)\end{cases}$$

2.5 points

3) Les pulsations propres

$\omega_1^2 = \Omega^2(1-K) = \frac{2k}{3m}$ (1) et $\omega_2^2 = \Omega^2(1+K) = \frac{2(k+8k_0)}{3m},$ (1)

Les rapports des amplitudes $r_1 = +1,$ $r_2 = -1.$ (0.5)

Exo 4 :

1.5 points

1) $L = \frac{3m}{4}\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \Omega^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2Kx_1x_2\right)\right]$ et $D_\alpha = 2\alpha\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$ (0.5)

Les équations du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta\dot{x}_1 + \Omega^2 x_1 - \Omega^2 K x_2 = \frac{2F(t)}{3m} & (0.5) \\ \ddot{x}_2 + 2\delta\dot{x}_2 + \Omega^2 x_2 - \Omega^2 K x_1 = 0 & (0.5) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{4\alpha}{3m}$$

Ou bien sous la forme
$$\begin{cases} \frac{3m}{2}\ddot{x}_1 + 4\alpha\dot{x}_1 + (k + 4k_0)x_1 - 4k_0x_2 = F(t) \\ \frac{3m}{2}\ddot{x}_2 + 4\alpha\dot{x}_2 + (k + 4k_0)x_2 - 4k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

2.5 points

2) Les équations intégro-différentielles

$$\begin{cases} \frac{d\dot{x}_1}{dt} + \Omega^2 \int \dot{x}_1 dt - \Omega^2 K \int \dot{x}_2 dt + 2\delta\dot{x}_1 = \frac{2F(t)}{3m} & (0.5) \\ \frac{d\dot{x}_2}{dt} + \Omega^2 \int \dot{x}_2 dt - \Omega^2 K \int \dot{x}_1 dt + 2\delta\dot{x}_2 = 0 & (0.5) \end{cases}$$

Ou bien
$$\begin{cases} \frac{3m}{2}\frac{d\dot{x}_1}{dt} + k\int \dot{x}_1 dt + 4k_0 \int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)dt + 4\alpha\dot{x}_1 = \frac{2F(t)}{3m} \\ \frac{3m}{2}\frac{d\dot{x}_2}{dt} + k\int \dot{x}_2 dt + 4k_0 \int (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)dt + 4\alpha\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \frac{\frac{2\bar{F}}{3m}\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\Omega^2 + 2\delta\right)}{\left[\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\Omega^2 + 2\delta\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2 K}{\omega}\right)^2\right]} = \frac{\bar{F}\left(\frac{3m}{2}j\omega + 4\alpha - \frac{j}{\omega}(k + 4k_0)\right)}{\left[\left(\frac{3m}{2}j\omega + 4\alpha - \frac{j}{\omega}(k + 4k_0)\right)^2 + \left(\frac{4k_0}{\omega}\right)^2\right]} \quad (0.75)$$

et
$$\dot{\bar{x}}_2 = \frac{-\frac{2\bar{F}\,j}{3m\omega}\Omega^2 K}{\left[\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\Omega^2 + 2\delta\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2 K}{\omega}\right)^2\right]} = \frac{-\frac{j}{\omega}4k_0\bar{F}}{\left[\left(\frac{3m}{2}j\omega + 4\alpha - \frac{j}{\omega}(k + 4k_0)\right)^2 + \left(\frac{4k_0}{\omega}\right)^2\right]} \quad (0.75)$$

1 point

3) L'impédance mécanique d'entrée

$$\bar{Z} = \frac{\bar{F}}{\dot{\bar{x}}_1} = \frac{3m\left[\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\Omega^2 + 2\delta\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2 K}{\omega}\right)^2\right]}{2\left(j\omega - \frac{j}{\omega}\Omega^2 + 2\delta\right)} = \frac{\left[\left(\frac{3m}{2}j\omega + 4\alpha - \frac{j}{\omega}(k + 4k_0)\right)^2 + \left(\frac{4k_0}{\omega}\right)^2\right]}{\left(\frac{3m}{2}j\omega + 4\alpha - \frac{j}{\omega}(k + 4k_0)\right)}. \quad (1)$$