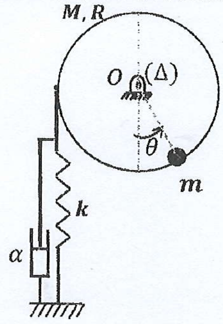
Examen de Rattrapage (Janvier 2018)

Exercice 1 : 1DL libre (5points)

Un pendule est constitué d'un disque plein (de moment d'inertie $J_0 = \frac{1}{2} MR^2$) et d'une masse m supposée ponctuelle, fixée sur sa circonférence. Ce pendule peut tourner **autour d'un axe (Δ) fixe** passant par le centre O (figure ci-dessous). Il est relié à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.



A l'équilibre, la masse m étant à la verticale, le ressort est non déformé, on écarte le pendule d'un angle θ_0(petit) puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1/Ecrire le Lagrangien L et la fonction de dissipation D du système.

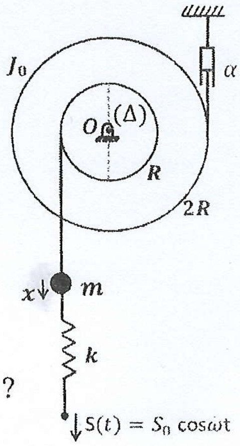
2/En déduire l'équation différentielle du mouvement en précisant la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ du système.

3/ Le mouvement observé du pendule étant vibratoire.

Ecrire l'expression de la réponse du système $\theta(t)$, puis calculer la valeur de la raideur du ressort k pour que la période des oscillations soit égale à 0.28 secondes.

On donne : α =110 N.s/m, M=5 kg, m=0.5 kg, $R = 20\ cm$, g=10m/s^2

Exercice 2 : 1DL forcé (5 points)



La poulie de moment d'inertie J_0, montrée ci-contre, est reliée à une masse ponctuelle m par l'intermédiaire d'une tige de masse négligeable et à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. La masse m est reliée à un ressort de raideur k dont l'extrémité est animée d'un mouvement sinusoïdal $S(t) = S_0\ \cos\omega t$.

1/ Monter que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

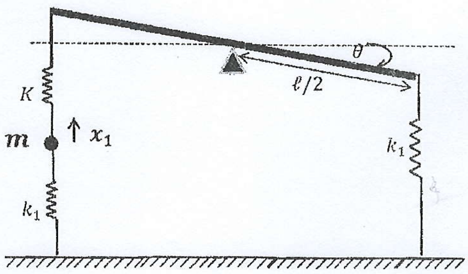
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 S(t)$$

2/ Donner la réponse du système $x(t)$, en régime permanent, en précisant l'expression de l'amplitude X_0 à la résonance.

3/ Quelle valeur de α faudrait-il choisir pour que l'amplitude X_0 à la résonance soit égale à S_0 ?

On donne : $J_0 = 2.5 kg.m^2$, m=2 kg, $R = 50\ cm$, g=10m/s^2 , $k = 4000 N/m$

Exercice 3 : 2DL libres (5 points)



Une barre de longueur ℓ et de masse M reposant en son milieu sur un pivot fixe est couplée à une masse ponctuelle m par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K (voir figure ci-contre). La masse et la barre sont reliées à un bâti fixe à l'aide de deux ressorts de même raideur k_1. A l'équilibre, la barre est horizontale et les ressorts sont non déformés.

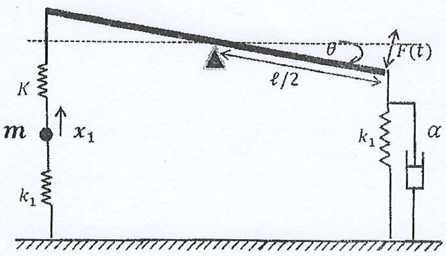
1. Etablir les équations différentielles du mouvement de vibrations de faible amplitude. On posera : $x_2 = \frac{\ell}{2}\theta$, $M = 9m$ et $K = k_1$

2. Déterminer les pulsations propres du système ω_{01} et ω_{02} en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$

3. Calculer le rapport d'amplitudes dans le deuxième mode de vibration. En déduire les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans ce même mode.

Exercice 4 : 2DL forcés (5 points)

On étudie le système de la barre couplée à la masse ponctuelle, en régime forcé en tenant compte de l'amortissement. La force sinusoïdale F(t)=F$_0$cosωt, est appliquée perpendiculairement, à l'extrémité de la barre (voir figure ci-contre) avec $M = 9m$ et $K = k_1$.



1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées x_1(t) et x_2(t), où $x_2 = \frac{\ell}{2}\theta$. En déduire les réponses x_1(t) et x_2(t) en régime permanent.

2. Quelle pulsation ω faut-il choisir pour arrêter le mouvement de la barre. En déduire l'amplitude X_1 de vibration de la masse m.

3. Dans le cas où l'amortissement est négligé, déterminer la (les) pulsations de résonances.

Corrigé de l'examen de Rattrapage (Janvier 2018)

Benouaret

Exercice 1 : 1DL libre (5points)

5 1/ Le lagrangien s'écrit :

$L = T - U = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - mgR\frac{\theta^2}{2}$, $D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$ avec $J_0 = \frac{1}{2}MR^2$

0.25 0.25 0.25 0.25 0.5

5 2/ L'équation de Lagrange étant: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$ d'où 0.25

$\ddot{\theta} + \frac{2[k+mg/R]}{(M+2m)}\dot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M+2m)}\theta = 0$avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2[k+mg/R]}{(M+2m)}}$ et $\delta = \frac{\alpha}{2(M+2m)}$

0.5 0.5 0.25 0.25

2 3/ Le mouvement observé est vibratoire, le système étant amorti, la réponse $\theta(t)$ est alors pseudo-périodique :
Utilisant les conditions initiales ($\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$) $\theta(t) = \frac{\omega_0}{\omega_a}\theta_0 e^{-\delta t}cos(\omega_a t + \Phi)$ où $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 0.5 0.5

$T_a = 0.28\ s$,

$\delta = \frac{\alpha}{2(M+2m)} = 18.33s^{-1}$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_a^2} + \delta^2} = 28.97\ rd/s$ 0.5

$\omega_0^2 = \frac{2[k+mg/R]}{(M+2m)}$ d'où $k = \frac{\omega_0^2(M+2m) - 2mg/R}{2} = 2492\ N/m$ 0.5

Exercice 2 : 1DL forcé (5points)

1/ 2

$L = T - U_k = \frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{R^2} + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(s - x)^2$, $D = \frac{1}{2}4\alpha\dot{x}^2$ 0.5 0.5 0.5

l'équation de Lagrange étant: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} + \frac{\partial D}{\partial\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{4\alpha}{\left(\frac{J_0}{R^2}+m\right)}\dot{x} + \frac{k}{\left(\frac{J_0}{R^2}+m\right)}x = \frac{k}{\left(\frac{J_0}{R^2}+m\right)}S_0\cos\omega t$ 0.5

avec : $\omega_0^2 = \frac{k}{\left(\frac{J_0}{R^2}+m\right)}$ et $\delta = \frac{2\alpha}{\left(\frac{J_0}{R^2}+m\right)}$

1 2/ En régime permanent, la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi)$ où : $X_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 S_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ 0.5

A la résonance, l'amplitude X_0 est maximale, elle est obtenue à la pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ comme :

$$X_0(\omega_R) = \frac{\omega_0^2 S_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$ 0.5

2 3/Sachant que $X_0 = S_0$, nous avons : $\delta^4 - \omega_0^2\,\delta^2 + \frac{\omega_0^4}{4} = 0$ 0.5

Le discriminent de cette équation étant nul, la résolution donne : $\delta^2 = \frac{\omega_0^2}{2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{J_0}{R^2}+m}} = 18.26\ rd/s$ 0.5 0.5

Or $\delta = \frac{\alpha}{6}$ d'où $\alpha = 3\sqrt{2}\omega_0 = 77.46\ N.s/m$ 0.5

Exercice 3 : 2DL libre (5points)

2 1/$L = T - U_k = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2$ 0.25 0.25 0.25 0.25

Prenant $K = k_1$, les équations différentielles du mouvement pour x_1 et x_2 sont données par les équations de Lagrange :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_i}\right) - \frac{dL}{dx_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k_1x_1 - k_1x_2 = 0 \\ \frac{M}{3}\ddot{x}_2 + 2k_1x_2 - k_1x_1 = 0 \end{cases}$ 0.5 0.5 avec : $M = 9m$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$

2 2/ Admettant des solutions particulières : $x_i(t) = A_i\cos(\omega t + \phi_i)$, ce système devient :

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ -\omega_0^2 x_1 + (2\omega_0^2 - 3\omega^2)x_2 = 0 \end{cases}$$ 0.25 0.25

Le système admet une solution (x_1, x_2) si son déterminant est nul :

$$Det = 3\omega^4 - 8\omega_0^2\omega^2 + 3\omega_0^4 = 0$$ 0.5

D'où les pulsations propres données par : $\omega_{01} = 0{,}451\omega_0$ 0.5 et $\omega_{02} = 2.215\omega_0$ 0.5

1 3/Sachant que : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}$ 0.5, le rapport d'amplitudes complexes dans le 2ième mode de vibration est donné par : $R = -0{,}215$ d'où les solutions (x_1, x_2) dans ce même mode :

$x_1 = A_1\cos(\omega_{02}t + \phi_1)$ et $x_2 = -0{,}215A_1\cos(\omega_{02}t + \phi_1) = 0{,}215A_1\cos(\omega_{02}t + \phi_1 + \pi)$ 0.5

Exercice 4 : 2DL forcé (5points)

2.5 1/$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2$, $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$ 0.25

Les équations différentielles pour x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_1}\right) - \frac{dL}{dx_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 + 2k_1x_1 - k_1x_2 = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F.\frac{\ell}{2} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_2}\right) - \frac{dL}{dx_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = F \Leftrightarrow 3m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + 2k_1x_2 - k_1x_1 = F \end{cases}$$ 0.25 0.5

En régime permanant et en notation complexe, les solutions s'écrivent :

$x_1(t) = X_1e^{j(\omega t+\Phi_1)}$ et $x_2(t) = X_2e^{j(\omega t+\Phi_2)}$ d'où le système d'équations devient :

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 & (1) \\ -\omega_0^2 x_1 + \left(2\omega_0^2 - 3\omega^2 + j\omega\frac{\alpha}{m}\right)x_2 = \frac{F}{m} & (2) \end{cases}$$ 0.25 0.25

De l'équation (1) $x_2 = \frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}x_1$ et remplaçant dans (2) nous avons :

$$x_1(t) = \frac{\omega_0^2}{-\omega_0^4+(2\omega_0^2-3\omega^2)(2\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\alpha}{m}(2\omega_0^2-\omega^2)}\frac{F_0}{m}\cos((\omega t + \varphi_1)$$ 0.5

$$x_2(t) = \frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{-\omega_0^4+(2\omega_0^2-3\omega^2)(2\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\frac{\alpha}{m}(2\omega_0^2-\omega^2)}\frac{F_0}{m}\cos((\omega t + \varphi_2)$$ 0.5

1.5 2/ de l'équation (1) sachant que: $x_2 = \frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}x_1$, on voit que pour arrêter le mouvement de la barre ($x_2 = 0$) il suffit que le terme $\frac{(2\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}$ 0.5 s'annule, ceci a lieu lorsque $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ 0.5 (anti-résonance).

Dans ce cas, l'amplitude $X_1 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ 0.5

1 3/ Dans le cas où l'amortissement est négligé ($\alpha \approx 0$). Les pulsations de résonance correspondent au maximum des amplitudes X_1 et X_2 qui a lieu lorsque le dénominateur des amplitudes est nul(≈ 0). Ce dénominateur correspond bien au déterminant du système qui peut aussi s'écrire sous la forme : 0.5

$-\omega_0^4 + (2\omega_0^2 - 3\omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) = 3(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)$

D'où les pulsations de résonances correspondent aux pulsations propres du système, à savoir $\omega_{R1} = 0{,}451\omega_0$ 0.25 et $\omega_{R2} = 2.215\omega_0$ 0.25