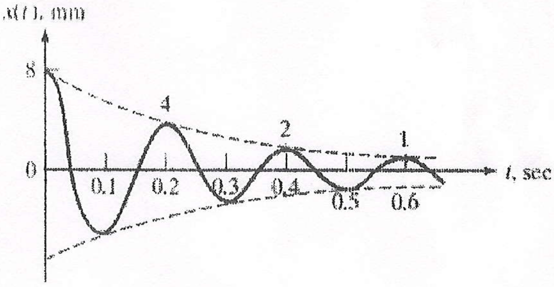
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M), Examen Final, le 09 Janvier 2019

Exercice n°1 (5 points) : Système à un degré de liberté libre



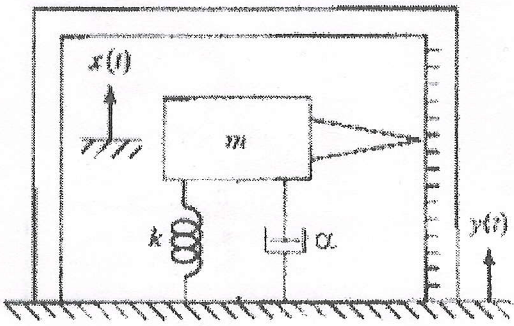
La réponse des oscillations libres d'un moteur électrique de poids 500 N, monté sur des fondations est montrée sur la figure ci-contre.

1- Trouver le déplacement x(t) du moteur électrique en fonction du facteur d'amortissement $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, du déplacement initial x_0 et de la pulsation des oscillations amorties ω_a. Donner les valeurs de x_0 et ω_a.

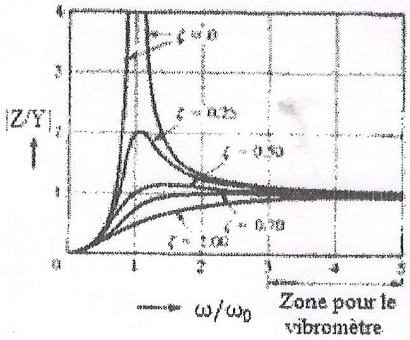
2- Trouver le coefficient d'amortissement α des fondations à partir du décrément logarithmique

3- Trouver la raideur du ressort des fondations, k.

Exercice n°2 (5 points) : Système à un degré de liberté forcé



(a)



(b)

Le dispositif mécanique de la figure (a) est un instrument sismique qui consiste en une masse (m), un ressort (k), un amortisseur (α) et un traceur qui donne le mouvement de la masse m en fonction du temps. Soit x(t) le mouvement de la masse m et y(t) le mouvement de la base que l'on suppose de la forme $y(t)=Y\sin\omega t$.

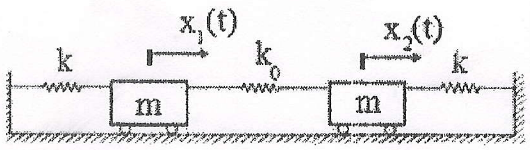
1- Établir l'équation du mouvement de la masse m en fonction du déplacement relatif $z(t)=x(t)-y(t)$.

2- La solution stationnaire de l'équation du mouvement est donnée sous la forme $z(t)=Z\sin(\omega t-\phi)$. Donner l'amplitude Z et la phase ϕ.

3- La variation $|Z/Y|$ en fonction du rapport des fréquences $r = \omega/\omega_0$ et du rapport d'amortissement $\zeta = \alpha/(2m\omega_0)$ est donnée dans la figure (b), avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Dans le cas d'un ressort de faible raideur, la pulsation propre ω_0 est petite devant la pulsation ω. Écrire dans ce cas z(t) et montrer que l'on peut ainsi déterminer l'amplitude Y des vibrations. Ceci est le principe du vibromètre.

Exercice n°3 (5 points) : Système à deux degrés libre

Pour le système de la figure ci-contre :

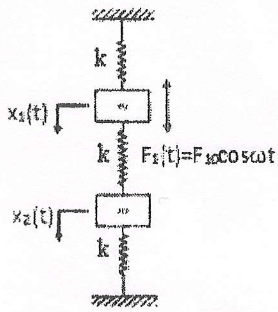


1- Ecrire les équations du mouvement des deux masses.

2- En utilisant les conditions initiales, $x_1(0)=A$, $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ et $x_2(0)=0$, déterminer les réponses des deux masses en spécifiant les pulsations propres et en introduisant un coefficient de couplage lâche $K=\frac{k_0}{k}\langle\langle 1$.

3- Ecrire les réponses des deux masses sous la forme de produits de cosinus et de sinus. Montrez qu'il existe des battements pour les deux masses et que celles-ci oscillent en quadrature de phase.

Exercice n°4 (5 points) : Système à deux degrés de liberté forcé



1. Ecrire les équations différentielles du mouvement de la figure ci-contre et mettre les deux équations sous forme matricielle.
2. En supposant une solution de la forme :
   $x_j(t)=X_j\cos\omega t$; $j=1,2$
   Trouver les modules $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$.
3. Donnez la pulsation d'anti-résonnance et les deux pulsations de résonance.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Physique 3 (V O M)
Solution de l'Examen Final, le 09 Janvier 2019

Exercice n°1 (5 points) : Système à un degré de liberté libre

2 points

1- $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(x_0 \cos\omega_a t + \frac{\delta x_0}{\omega_a}\sin\omega_a t\right)$$

$\tau_a = 0{,}2s$, $f_a = 5Hz$, $\omega_a = 31{,}416\ s^{-1}$, $x_0 = 8mm$

2 points

2- $\left(\frac{x_1}{x_{1-1}}\right) = \ln 2 = 0{,}6931 = \frac{2\pi\delta}{\omega_a} \Rightarrow \delta = \frac{0{,}6931\omega_a}{2\pi} = 3{,}4655$

$$\alpha = 2\delta m = \frac{2 \times 3{,}4655 \times 500}{9{,}81} = 353{,}26\ N.s/m$$

1 point

3- $\omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2 \Rightarrow \omega_0 = 31{,}6065\ s^{-1}$

$k = m\omega_0^2 = \frac{500}{9{,}81}(31{,}6065)^2 = 5{,}0916\ 10^4\ N/m$

Exercice n°2 (5 points) : Système à un degré de liberté soumis à un déplacement sinusoïdal

2 points

1- $y(t) = Y\sin\omega t$; $m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$

$z = x - y \Rightarrow m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = m\omega^2 Y\sin\omega t$

1 point

2- $z(t) = Z\sin(\omega t - \phi)$; $Z = \frac{Y\omega^2}{\left[(k - m\omega^2) + \alpha^2\omega^2\right]^{1/2}} = \frac{r^2 Y}{\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\omega}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$ avec $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ et $\zeta = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$

2 points

3- On voit d'après le graphe $\left|\frac{Z}{Y}\right|$: $\frac{\omega}{\omega_0} > 3, \left|\frac{Z}{Y}\right| \approx 1 \Rightarrow z(t) \approx Y\sin(\omega t - \phi)$

On retrouve Y comme l'amplitude de z(t).

Exercice n°3 (5 points) : Système à deux degrés libre

1 point

1- $\ddot{x}_1 + \frac{(k + k_0)}{m}x_1 - \frac{k_0}{m}x_2 = 0$, $\ddot{x}_2 + \frac{(k + k_0)}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0$

2- $\det\begin{bmatrix} \{-m\omega^2 + (k + k_0)\} & -k_0 \\ -k_0 & \{-m\omega^2 + (k + k_0)\} \end{bmatrix} = 0$, $\Rightarrow$ $m^2\omega^4 - 2(k + k_0)m\omega^2 + k(k + 2k_0) = 0$

Solutions ($k_0 \ll k$) : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} \approx \left(1 + \frac{k_0}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$; Rapports d'amplitude : $r_1 = +1$ et $r_2 = -1$

Mouvements généraux des deux masses et conditions initiales :

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad ; \quad x_2(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - X_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Avec les conditions initiales : $x_1(0) = A$, $\dot{x}(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = X_1\cos\phi_1 + X_2\cos\phi_2 = A \\ x_2(0) = X_1\cos\phi_1 - X_2\cos\phi_2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1\sin\phi_1 - \omega_2 X_2\sin\phi_2 = 0 \\ \dot{x}_2(0) = -\omega_1 X_1\sin\phi_1 + \omega_2 X_2\sin\phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{A}{2}\cos\omega_1 t + \frac{A}{2}\cos\omega_2 t \quad ; \quad x_2 = \frac{A}{2}\cos\omega_1 t - \frac{A}{2}\cos\omega_2 t$$

2 points

3- $x_1 = A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t \quad ; \quad x_2 = A\sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t\sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t$

$K \approx \frac{k_0}{k} << 1$: $\omega_1 - \omega_2 = K\omega_1$; $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1$

$$x_1(t) = A\cos\left(\frac{K\omega_1 t}{2}\right)\cos\omega_1 t, \quad x_2(t) = A\sin\left(\frac{K\omega_1 t}{2}\right)\sin\omega_1 t$$

2 points

Les oscillations des deux masses présentent des battements $T_b = \frac{2\pi}{k\omega_1}$ et oscillent en quadrature.

Exercice n°4 (5 points) : Système à deux degrés de liberté forcé

1- Equations du mouvement

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_{10}\cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

que l'on peut mettre sous forme matricielle :

2 points

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10}\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2- On suppose une solution de la forme : $x_j(t) = X_j\cos\omega t \quad ; \quad j = 1,2$

Qui nous donne les composantes de la matrice impédance :

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k \ , \ Z_{12}(\omega) = -k$$

2 points

Nous obtenons X_1 et X_2 à partir des composantes de l'inverse de la matrice impédance

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$$X_2(\omega) = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

3- $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$ sont les carrés des pulsations de résonance.

1 point

Le carré de la pulsation d'antirésonance est donné par $\omega^2 = \frac{2k}{m}$