Exercice 1: (5 points)

Le système, représenté sur la figure 1, est constitué d'une poulie de moment d'inertie J_0 et d'une masse **m**.
Après avoir écarté la masse **m** de x_0 de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale, le système s'est mis en mouvement.

1. Montrer que dans le cas où $r_2 = 2r_1$ et $\frac{J_0}{r_1^2} = 3m$, le Lagrangien du système s'écrit:

$$L = \frac{1}{2}\left[4m\dot{x}^2 - 4kx^2\right]$$

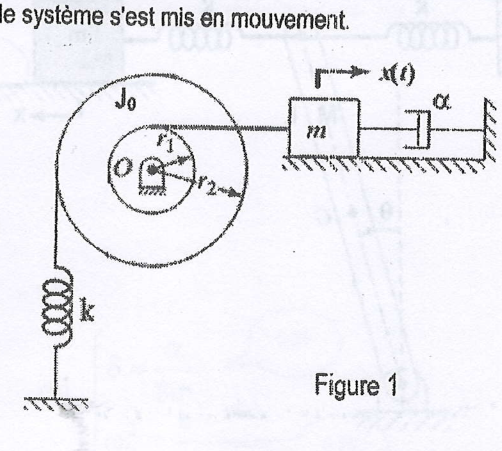

Figure 1

2. Etablir l'équation du mouvement du système et préciser les expressions du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre du système.
3. En supposant que le déplacement x(t) du système s'écrit: $x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-5t}$, déterminer dans ces conditions, la valeur du coefficient de frottement α, la constante de raideur k ainsi que les constantes d'intégration a_1 et a_2.
On donne: **m** =10kg, r_1 = 10cm et $x(0) = x_0$=10cm.

Exercice2: (6 points)

I. Le cylindre représenté sur le figure 2 de masse M et de moment d'inertie J_0 peut rouler sans glisser sur un plan. Il est raccordé d'un côté à un bâti par un ressort de raideur k_1 placé à une distance a du centre et de l'autre côté, par un amortisseur de coefficient de frottement α, placé au centre du cylindre et attaché à un bâti en mouvement sinusoïdal d'élongation
$s(t) = S_0.\sin\omega t$.

On appelle $x = R\theta$ le déplacement du centre de masse du cylindre par rapport à la position d'équilibre.

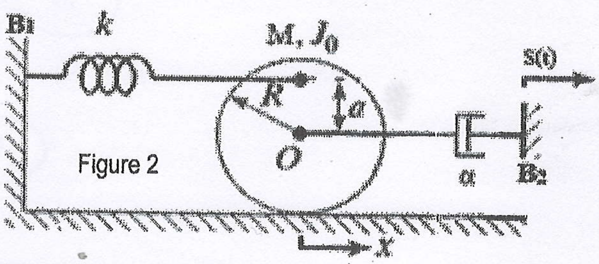

Figure 2

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du cylindre en x. Préciser l'expression de la pulsation propre ω_0 du système.
2. Donner la solution de l'équation en régime permanent.
3. Pour une pulsation ω = 10rd/s, quelle est la valeur de a pour laquelle l'amplitude d'oscillation du cylindre est maximale? Ecrire, dans cette condition, la solution x(t).

On donne: M= 40Kg, R=1m, k_1= 1500N/m, α = 120 kg/s et $J_0 = \frac{MR^2}{2}$

Exercice 3:

Partie A: (5points).

Le système de la figure 4 est composé d'une tige rigide uniforme, de masse **M =10Kg** et de longueur ***L= 1m*** qui peut pivoter, dans le plan vertical, autour d'un axe passant par l'extrémité O. L'autre extrémité est reliée, d'une part, par un ressort de raideur **k à** une masse **m** pouvant glisser sur un plan horizontal et d'autre part à un bâti fixe par un autre ressort de même raideur **k.** A t=0s, la tige, en équilibre; est verticale ($\theta(0)=0$) et les ressorts non déformés.

1. En prenant $m = \frac{M}{2}$, $\frac{k}{M} = \frac{3g}{2L} = \omega_0^2$, et $y(t) = L\theta(t)$, montrer que les équations du mouvement du système s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_0^2 x - 2\omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{y} + 5\omega_0^2 y - 3\omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer les pulsations propres du système en fonction de ω_0.
3. Déterminer les rapports d'amplitude dans les deux modes de vibrations et écrire les solutions générales.

Partie B: (5points).

Dans la deuxième partie, on étudie les oscillations du système lorsque la masse est soumise à une force excitatrice d'intensité $F(t) = F_0\cos\omega t$. L'ensemble des frottement visqueux subis par le système sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α attaché à la masse.(Figure 5)

1. Ecrire les équations du mouvement du système dans ces conditions.
2. En régime permanent, résoudre, en représentation complexe, les équations du mouvement.
3. Donner les expressions réelles des déplacements x(t) et y(t), pour le cas où $\omega = \sqrt{5}.\omega_0$. Conclure.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene | **Année universitaire 2018/2019**

Module : Vibrations Mécaniques Epreuve de rattrapage Durée: 1h 30mn | License L2/ ST Janvier2019

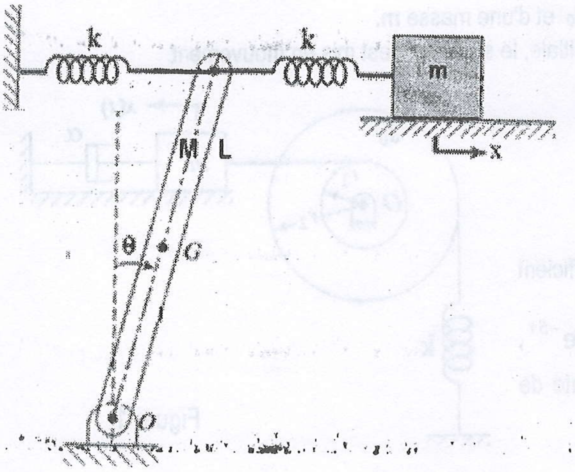

Figure 4

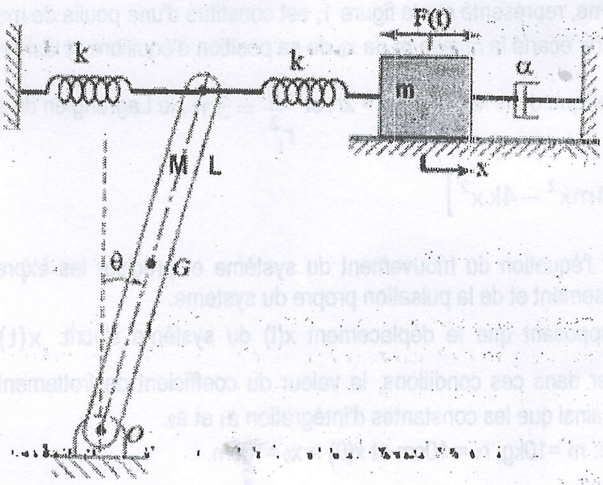

Figure 5

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Module : Vibrations et Ondes Mécaniques.

Corrigé de l'épreuve du rattrapage- janvier 2019
License L2/ST

Exercice 1:

1- $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$ 0,5 , $U=\frac{1}{2}k(r_2\theta)^2$ 0,5

Avec $x=r_1\theta$, $r_2=2r_1$ et $\frac{J_0}{r_1^2}=3m$; nous avons $L=\frac{1}{2}\left(4m\dot{x}^2-4kx^2\right)$ 0,5

2- L'équation du mouvement:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad \text{Avec} \quad D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$ 0,5

$$4m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+4kx=0 \quad \text{i.e} \quad \ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$ 0,5

où $\delta=\frac{\alpha}{8m}$ 0,25 ; $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ 0,25

3- $x(t)=(a_1+a_2t)e^{-5t}$, le mouvement est en régime critique : $\delta=\omega_0=5.s^{-1}$ 0,5

d'où : $\alpha=8\delta m$ et $k=\omega_0^2m$

A.N: $\alpha=400kg/s$ 0,5 et $k=250N/m$ 0,5

A partir des conditions initiales du mouvement:

$\dot{x}(t)=a_2e^{-5t}-5(a_1+a_2t)e^{-5t}$

On a $x(0)=a_1$ et $\dot{x}(0)=a_2-5a_1$ 0,5

A.N: $a_1=0{,}1m$ et $a_2=0{,}5m/s$

Exercice 2:

1- $T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$ 0,5 ; $U=\frac{1}{2}k[(R+a)\theta]^2$ 0,5 ; $D=\frac{1}{2}\alpha(\dot{x}-\dot{s})^2$ 0,5

Avec $x=R\theta$ et $J_0=\frac{MR^2}{2}$; $L=\frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}k\left(\frac{R+a}{R}\right)^2x^2$

L'équation de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$, donne: $\frac{3M}{2}\ddot{x}+\alpha(\dot{x}-\dot{s})+k\left(\frac{R+a}{R}\right)^2x=0$

d'où: $\ddot{x}+\frac{2\alpha}{3M}\dot{x}+\frac{2k}{3M}\left(\frac{R+a}{R}\right)^2x=\frac{2\alpha}{3M}\omega S_0\cos\omega t$ 0,5

ou $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=A_0\cos\omega t$, avec $\delta=\frac{\alpha}{3M}$, 0,25 $\omega_0^2=\left(\frac{R+a}{R}\right)^2\frac{2k}{3M}$, 0,25 $A_0=\frac{2\alpha}{3M}\omega S_0$

En régime permanent: $x(t)=X_0(\omega).\cos(\omega t+\Phi(\omega))$ 0,25

Avec : $X_0(\omega)=\frac{A_0}{\sqrt{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2\right]}}$ 0,5 et $\Phi(\omega)=-\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$ 0,25

ω fixée, alors $X_0(\omega_0(a))$ est maximale pour $\omega_0(a)=\omega$. 0,5

d'où $\left(\frac{R+a}{R}\right)\sqrt{\frac{2k}{3M}}=\omega$ i.e $a=R\left[\omega\sqrt{\frac{3k}{2M}}-1\right]$ 0,5

A.N: a=R=1m 0,5

En remplaçant dans X_0 et Φ, ω_0 par ω, on trouve : $X_0=S_0$ et $\Phi=-\frac{\pi}{2}$. D'où: $x(t)=S_0\sin(\omega t)$ 1pt

Exercice 3:

Partie A: Oscillations libres d'un système à deux degrés de liberté: (5points)

1- $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_{/o}\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(L\theta)^2-\frac{1}{2}k(x-L\theta)^2-Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

Avec $J_{/o}=\frac{ML^2}{3}$, $\cos\theta\cong\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$ et y(t) = Lθ(t)

$$L=\frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2+\frac{M}{3}\dot{y}^2\right]-\frac{1}{2}\left[k-\frac{Mg}{2L}\right]y^2-\frac{1}{2}k(x-y)^2$$ 1pt

Equations de Lagrange: $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0\end{cases}$; d'où $\begin{cases}m\ddot{x}+k(x-y)=0\\ \frac{M}{3}\ddot{y}+\left[k-\frac{Mg}{2L}\right]y-k(x-y)=0\end{cases}$

En prenant $m=\frac{M}{2}$, $\frac{k}{M}=\frac{3g}{2L}=\omega_0^2$, on aura $\begin{cases}\ddot{x}+2\omega_0^2x-2\omega_0^2y=0 & 0{,}5\\ \ddot{y}+5\omega_0^2y-3\omega_0^2x=0 & 0{,}5\end{cases}$ (I)

2- En prenant $\begin{cases}x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\\ y(t)=B\cos(\omega t+\varphi)\end{cases}$, et remplaçant dans (I),

on aboutit à: $\begin{cases}\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)A-2\omega_0^2B=0\\ -3\omega_0^2A+\left(5\omega_0^2-\omega^2\right)B=0\end{cases}$ (II) 0,5

(II) admet solutions non nulles si le déterminant est nul, d'où l'équation aux pulsation propres suivante:

$\omega^4-7\omega_0^2\omega^2+4\omega_0^4=0$ dont le discriminant est $\Delta=\left(\sqrt{33}.\omega_0^2\right)^2$ 0,5

Les pulsations propres : $\begin{cases}\omega_1=0{,}792\,\omega_0 & 0{,}5\\ \omega_2=2{,}524\,\omega_0 & 0{,}5\end{cases}$

3- Les rapports d'amplitudes : $\begin{cases}R_1=\frac{B_1}{A_1}=\frac{\left(2\omega_0^2-\omega_1^2\right)}{2\omega_0^2}=+0{,}686 & 0{,}25\\ R_2=\frac{B_2}{A_2}=\frac{\left(2\omega_0^2-\omega_2^2\right)}{2\omega_0^2}=-2{,}185 & 0{,}25\end{cases}$

d'où les solutions générales: $\begin{cases}x(t)=A_1\cos(\omega_0t+\varphi_1)+A_2\cos\left(\sqrt{6}\omega_0t+\varphi_2\right) & 0{,}25\\ y(t)=0{,}686A_1\cos(\omega_0t+\varphi_1)-2{,}185A_2\cos\left(\sqrt{6}\omega_0t+\varphi_2\right) & 0{,}25\end{cases}$

Partie B: Oscillations forcées d'un système à deux degrés de liberté: (4points+1point Bonus)

F(t) est appliquée sur m et la fonction de dissipation $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

Les équations du mouvement: $\begin{cases}m\ddot{x}+k(x-y)+\alpha\dot{x}=F_0\cos\omega t\\ \frac{M}{3}\ddot{y}+\left[k-\frac{Mg}{2L}\right]y-k(x-y)=0\end{cases}$

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Module : Vibrations et Ondes Mécaniques.

ou $\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} - 2\omega_0^2 y = A_0 \cos\omega t \\ \ddot{y} + 5\omega_0^2 y - 3\omega_0^2 x = 0 \end{cases}$ 0,5 0,5 Avec $\delta = \dfrac{\alpha}{M}$ et $A_0 = \dfrac{2F_0}{M}$

2- En régime permanent $\begin{cases} x(t) = X(\omega)\cos(\omega t + \Phi_1(\omega)) \\ y(t) = Y(\omega)\cos(\omega t + \Phi_2(\omega)) \end{cases}$

En notation complexe, on écrit $\begin{cases} x(t) = \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} \\ y(t) = \tilde{Y}(\omega)e^{j\omega t} \end{cases}$ et en remplaçant dans le système d'équations, on aboutit à:

$$\begin{cases} \left[\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) + j2\delta\omega\right]\tilde{X} - 2\omega_0^2\tilde{Y} = A_0 \\ -3\omega_0^2\tilde{X} + \left(5\omega_0^2 - \omega^2\right)\tilde{Y} = 0 \end{cases}$$

0,5 0,5

0,5 0,5

$$\tilde{X} = \frac{A_0\left(5\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left[\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) + j2\delta\omega\right]\left(5\omega_0^2 - \omega^2\right) - 6\omega_0^4} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \frac{+3\omega_0^2 A_0}{\left[\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) + j2\delta\omega\right]\left(5\omega_0^2 - \omega^2\right) - 6\omega_0^4}$$

3- Pour $\omega = \sqrt{5}\omega_0$; $\left(5\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0$

d'où $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \dfrac{F_0}{k}\cos(\omega t + \pi) = -\dfrac{F_0}{k}\cos\omega t \end{cases}$ 0,5 0,5

A cette pulsation, la force excitatrice et la force de rappel du ressort de couplage agissent sur la masse en sens opposés ce qui maintient la masse en équilibre: la masse m n'oscille pas

1pt
Bonus