

Exercice 1 (10 points)

Partie I- Le système de la **figure 1-a** montre une poulie de centre O, de moment d'inertie J_0 , composée de deux disques solidaires de rayons $r_1=r$ et $r_2=2r$. Au rayon r_1 est attaché un ressort de raideur k_2 , au rayon r_2 sont liés une masse m et un ressort de raideur k_1 . Pour les données suivantes : $k_1=1000$ N/m, $k_2= 500$ N/m, $m= 10$ kg, $r = 5$ cm, $j_0 = 1$ kg.m².

On écarte le système de sa position d'équilibre puis on le lâche.

1- Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée x et préciser les expressions du facteur d'amortissement et la pulsation propre.

2- Dans quelle régime le système revienne sans oscillation à sa position d'équilibre le plus rapidement possible ; En déduire le coefficient d'amortissement α .

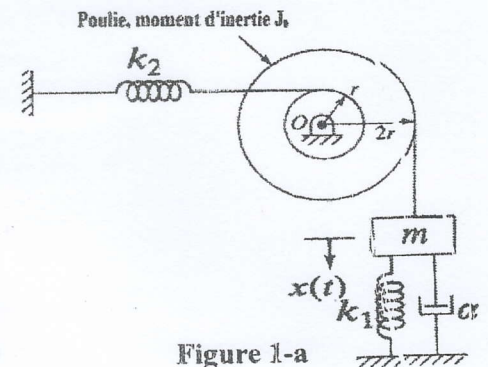


Figure 1-a

Partie II- On applique sur la masse m (**Figure 1-b**) une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

1- Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée x .

2- En supposant que la réponse (la solution) permanente est de la forme $x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)$. Calculer l'amplitude X et le déphasage ϕ lorsque $\omega = 20$ rad/s et $F_0 = 50$ N.

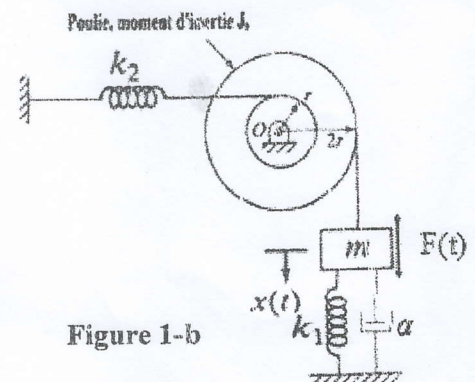


Figure 1-b

Exercice 2 (10 points)

Partie I- Pour le système de la figure ci-contre (**Figure 2- a**) :

1- Ecrire les équations du mouvement des deux masses.

2- Déterminer les deux pulsations propres du système ω_1 et ω_2 ; On déduire les deux rapports d'amplitudes r_1 et r_2 .

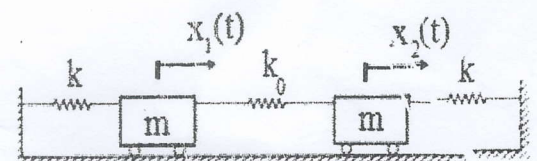


Figure 2-a

Partie II- On applique sur la masse de déplacement X_1 une force d'intensité sinusoïdale $F(t)=F_0 \cos \omega t$ (**Figure 2-b**).

1- Ecrire les équations différentielles du système.

2- Ecrire les équations différentielles du circuit électrique analogue.

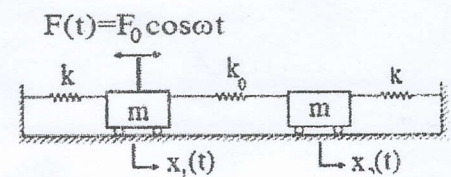


Figure 2-b

Solution EF Novembre 2020

Exercice 1: (10 points)

Partie 1

1)- Equation du mouvement

- Énergie cinétique (0.5pt)

$$E_c = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + J_0\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$x = 2r\theta \quad (2)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_0}{(2r)^2}\right)\dot{x}^2 \quad (3)$$

- Énergie potentielle : (0.5pt)

$$E_p = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2(r\theta)^2) \quad (4)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)x^2 \quad (5)$$

- Fonction de dissipation : (0.25pt)

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \quad (6)$$

- Equation de Lagrange : (0.25pt)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7)$$

- Equation du mouvement (1pt)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{\left(m + \frac{J_0}{(2r)^2}\right)}\dot{x} + \frac{\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)}{\left(m + \frac{J_0}{(2r)^2}\right)}x = 0 \quad (8)$$

Equation de la forme

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (9)$$

Avec (0.25pt)

$$\delta = \frac{\alpha}{\left(m + \frac{J_0}{(2r)^2}\right)2} \quad (10)$$

et (0.25pt)

$$\omega_0^2 = \frac{\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)}{\left(m + \frac{J_0}{(2r)^2}\right)} \quad (11)$$

2- Le régime demandé est le régime critique (1pt)

$$\omega_0 = \delta \quad (12)$$

Application numérique (1pt)

$$\alpha = 703.56 \text{ kg s}^{-1}$$

Partie 2

1- Equation du mouvement du système forcé :

$$(m + \frac{J_0}{(2r)^2})\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_1 + \frac{k_2}{4})x = F_0\cos(\omega t) \text{ (1pt)} \quad (13)$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{(m + \frac{J_0}{(2r)^2})}\dot{x} + \frac{(k_1 + \frac{k_2}{4})}{(m + \frac{J_0}{(2r)^2})}x = \frac{F_0}{(m + \frac{J_0}{(2r)^2})}\cos(\omega t) \text{ (1pt)} \quad (14)$$

2- Calcul de l'amplitude et du déphasage : - Calcul de l'amplitude de la solution particulière (1pt)

$$X(\omega) = \frac{\frac{F_0}{(m + \frac{J_0}{(2r)^2})}}{(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}) + (2\delta\omega)^2} \quad (15)$$

- Calcul de déphasage (1pt)

$$\tan\phi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (16)$$

- Applications numériques (1pt)

$$X = 0.001136m$$

$$\phi = 0.229rd = 13.13^\circ$$

Exercice 2: (10 points)

Partie 1

1- Equation du mouvement

- Énergie cinétique (0.5pt)

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (17)$$

- Énergie potentielle : (1pt)

$$E_p = \frac{1}{2}(k(x_1 + x_2)^2 + k_0(x_1 - x_2)^2) \quad (18)$$

-Fonction de Lagrange (0.5pt)

$$L = E_c - E_p \quad (19)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(k(x_1 + x_2)^2 + k_0(x_1 - x_2)^2) \quad (20)$$

-Équations du mouvement : (0.5pt+0.5pt)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k + k_0x_1 - k_0x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k + k_0x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k_0}{m}x_1 - \frac{k_0}{m}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k+k_0}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$

2- Calcul des pulsations propres : (1pt+0.25pt+0.25pt)

En injectant des solution de la forme $x_i = A_i\cos(\omega t + \phi)$ nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} (\frac{k+k_0}{m} - \omega^2)A_1 - \frac{k_0}{m}A_2 = 0 \\ -\frac{k_0}{m}A_1 + (\frac{k+k_0}{m} - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} (\frac{k+k_0}{m} - \omega^2) & -\frac{k_0}{m} \\ -\frac{k_0}{m} & (\frac{k+k_0}{m} - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les pulsation propres sont obtenues en annulant la déterminant de la matrice précédente

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} \quad (22)$$

Le système étant symétrique les rapports d'amplitudes valent $r_1 = +1$ et $r_2 = -1$ (0.5pt)

Partie 2

1- Équations du système forcé (2.5pt)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k + k_0x_1 - k_0x_2 = F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 + k + k_0x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

2- Équations du circuit électrique analogue : (2.5pt)

$$\begin{cases} m \frac{dx_1}{dt} + k \int x_1 dt + k_0 \int (x_1 - x_2) dt = F_0 \cos(\omega t) \\ m \frac{dx_2}{dt} + k \int x_2 dt + k_0 \int (x_2 - x_1) dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1 dt + \frac{1}{C_0} \int (i_1 - i_2) dt = e_0 \cos(\omega t) \\ L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int i_2 dt + \frac{1}{C_0} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$