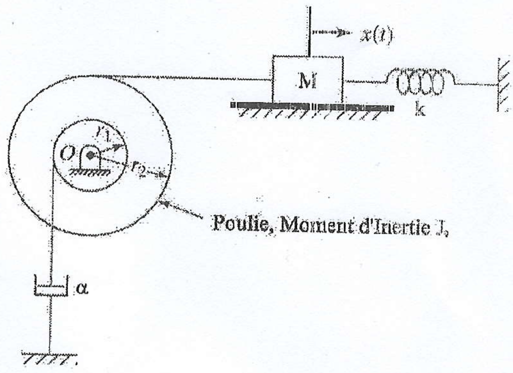
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Examen Final, le 23 Janvier 2020, durée 1h15 mn

Exercice n°1 : Système libre à un degré de liberté (7 points)

Le système de la figure 1 montre une poulie de centre O, de moment d'inertie J_0, composée de deux disques solidaires de rayons r_1 et r_2. Au rayon r_1 est attaché un amortisseur de constante α, au rayon r_2 sont liés une masse M et un ressort de raideur k.

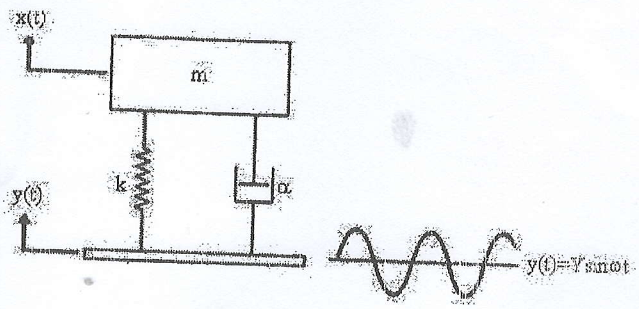
Le système a une fréquence propre f_0 égale à 5 Hz pour les données suivantes : M=10 kg, J_0=5kg.m^2, r_1=10cm, r_2=25cm.



1. Trouver l'équation du mouvement en fonction des données du problème et de la constante α.
2. Quand on donne à la masse M un déplacement initial, l'amplitude de vibration est réduite de 80% en 10 périodes. Trouver la valeur de α. (On supposera que l'amortissement est très faible).
3. Déterminer la solution de l'équation du mouvement en supposant un déplacement initial x_0=4cm et une vitesse initiale $\dot{x}_0$ nulle.

Exercice n°2 : Réponse à une excitation harmonique de la base (6 points)

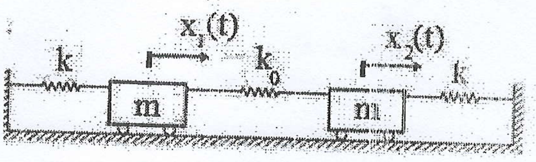
Soit un système à un degré de liberté avec amortissement visqueux de constante α. Ce système est soumis à une excitation harmonique de sa base $y(t) = Y\sin\omega t$, comme le montre la figure. Pour les données suivantes : m=10kg, α=20N.m/s, k=4000N/m, y(t)=0,05sin(5t) m.



1. Montrer que l'équation du mouvement du système est donnée par : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kY\sin\omega t + \alpha\omega Y\cos\omega t$
2. En utilisant les données et le principe de superposition, donner la réponse permanente de la masse $x_p(t)$ sous la forme $x_p(t) = X_1\sin(\omega t + \phi) + X_2\cos(\omega t + \phi)$.
3. Ecrire la solution permanente sous la forme $x_p(t) = X\cos(\omega t + \phi + \theta)$. Calculer le rapport des amplitudes X/Y de la réponse permanente à celle du mouvement de la base y(t), (ne pas calculer θ).

Exercice n°3 : Système libre à deux degrés de liberté (7 points)

Pour le système de la figure ci-contre :



1. Ecrire les équations du mouvement des deux masses.
2. En utilisant les conditions initiales, $x_1(0) = A$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ et $x_2(0) = 0$, déterminer les réponses des deux masses en spécifiant les pulsations propres.
3. Ecrire les réponses des deux masses sous la forme de produits de cosinus et de sinus. En introduisant un coefficient de couplage lâche $K = \frac{k_0}{k} \ll 1$, montrez qu'il existe des battements pour les deux masses et que celles-ci oscillent en quadrature de phase.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Solution de l'Examen Final du 23 Janvier 2020

Solution de l'exercice n°1 (7 points) : Système libre à un degré de liberté

1. $L = T - V$; $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$ *avec* $x = \theta r_2$; $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kr_2^2\theta^2, D = \frac{1}{2}\alpha(r_1\dot{\theta})^2$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\alpha r_1\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\left(J_0 + Mr_2^2\right)\ddot{\theta} + \alpha r_1\dot{\theta} + kr_2^2\theta = 0}$$ **(3 points)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{0{,}0625k}{5{,}625}} = 2\pi f_0 = 2\pi(5) = 31{,}416 \Rightarrow \ k = 8{,}8827\times10^4 \ \text{N/m}$$

En utilisant les données : $\left[5 + 10(0{,}25)^2\right]\ddot{\theta} + 0{,}1\alpha\dot{\theta} + k(0{,}25)^2\theta = 0 \Rightarrow \boxed{5{,}625\ddot{\theta} + 0{,}1\alpha\dot{\theta} + 0{,}557\times10^4\theta = 0}$

2. $$\frac{x_1}{x_{11}} = \frac{1{,}0}{0{,}2} = 5 = e^{10\delta T_a}$$

$$\ln\frac{x_1}{x_{11}} = \ln 5 = 1{,}6094 = 10\delta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{62{,}832\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \frac{\delta}{\omega_0} << 1 \Rightarrow \frac{\delta}{\omega_0} \approx \frac{1{,}6094}{62{,}832} = 0{,}0256$$

$$\frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}0256 = \frac{0{,}10\alpha}{2(5{,}625)(31{,}416)} \Rightarrow \boxed{\alpha = 90{,}478 \ \text{N.s/m}}$$ **(2 points)**

3. $x(t) = X_0e^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \phi_0\right)$; $X_0 = x_0$, $\phi_0 = 0$, et $\omega_0 = 31{,}416 s^{-1}$, $\delta = 0{,}8$

$$\boxed{\Rightarrow \quad x(t) = 0{,}04e^{-0{,}8t}\cos(31{,}416t)}$$ **(2 points)**

Solution de l'exercice n°2 (6 points) : Réponse à une excitation harmonique de la base

1. L'élongation du ressort est x-y et la vitesse relative entre les extrémités de l'amortisseur et $\dot{x} - \dot{y}$. Ce qui donne l'équation du mouvement : $m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \ ; \ V = \frac{1}{2}k(x-y)^2, D = \frac{\alpha}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2$$

$y(t) = Y\sin\omega t$; $\dot{y}(t) = \omega Y\cos\omega t$ D'où : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kY\sin\omega t + \alpha\omega Y\cos\omega t$ **(2 points)**

2. $F_1(t) = kY\sin\omega t \Rightarrow x_1(t) = \dfrac{kY/m\sin(\omega t + \phi)}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$; $\phi = -\text{arctg}\dfrac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$

$$F_2(t) = \alpha\omega Y\cos\omega t \Rightarrow x_2(t) = \frac{\alpha\omega Y/m\cos(\omega t + \phi)}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}} \ , \ x_p(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{kY/m}{\sqrt{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}}\sin(\omega t + \phi) + \frac{\alpha\omega Y/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t + \phi) \text{ avec } \phi = -\text{arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

Avec les données, on écrit :

$$\alpha = 20N.m/s, \ Y = 0{,}05\,m, \ \omega = 5\,rad/s, \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20\,rad/s, \ \frac{kY}{m} = \frac{(4000)(0{,}05)}{10} = 20 \ ;$$

$$\frac{\alpha\omega Y}{m} = \frac{(20)(5)(0{,}05)}{10} = 0{,}5$$

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\delta^2\omega^2\right]^{1/2} = \left[\left(20^2 - 5^2\right)^2 + 4\left(\frac{20}{2(10)}\right)^2 5^2\right]^{1/2} = 375{,}13$$

$$\phi = -\text{arctg}\left(\frac{(2(20)/2(10))5}{20^2 - 5^2}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{10}{375}\right) = -\text{arctg}(0{,}0266) \Rightarrow \ \phi \approx -0{,}0266$$

$$\boxed{x_p(t) = 0{,}00133\cos(5t - 0{,}0266) + 0{,}0533\sin(5t - 0{,}0266)}$$ **(2 points)**

3. $x_p(t) = \dfrac{kY/m}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}\sin(\omega t+\phi)+\dfrac{\alpha\omega Y/m}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t+\phi)$

$$\boxed{x_p(t) = X\cos(\omega t+\phi+\theta) = Y\left[\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2+\left(\frac{\alpha\omega}{m}\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}\right]^{1/2}\cos(\omega t+\phi+\theta)}$$

A.N : $\boxed{\dfrac{X}{Y} = \dfrac{\left(400^2+100\right)^{1/2}}{375{,}13} = 1{,}066}$ **(2 points)**

Solution de l'Exercice n°3 (7 points) : Système à deux degrés libre

1- $\ddot{x}_1+\dfrac{(k+k_0)}{m}x_1-\dfrac{k_0}{m}x_2 = 0$, $\ddot{x}_2+\dfrac{(k+k_0)}{m}x_2-\dfrac{k_0}{m}x_1 = 0$ **(2 points)**

2- $\det\begin{bmatrix}\left\{-m\omega^2+(k+k_0)\right\} & -k_0\\ -k_0 & \left\{-m\omega^2+(k+k_0)\right\}\end{bmatrix} = 0$, $\Rightarrow$ $m^2\omega^4-2(k+k_0)m\omega^2+k(k+2k_0) = 0$ **(1 point)**

Solutions (k_0<<k) : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k_0}{m}} \approx \left(1+\dfrac{k_0}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}$; Rapports d'amplitude : r_1= +1 et r_2= -1 **(1 point)**

Mouvements généraux des deux masses et conditions initiales :

$x_1(t) = X_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+X_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$; $x_2(t) = X_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-X_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$

Avec les conditions initiales : $x_1(0) = A$, $\dot{x}(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_1(0) = X_1\cos\phi_1+X_2\cos\phi_2 = A\\ x_2(0) = X_1\cos\phi_1-X_2\cos\phi_2 = 0\end{array}$; $\begin{array}{l}\dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1\sin\phi_1-\omega_2 X_2\sin\phi_2 = 0\\ \dot{x}_2(0) = -\omega_1 X_1\sin\phi_1+\omega_2 X_2\sin\phi_2 = 0\end{array}$

$\Rightarrow$ $x_1 = \dfrac{A}{2}\cos\omega_1 t+\dfrac{A}{2}\cos\omega_2 t$; $x_2 = \dfrac{A}{2}\cos\omega_1 t-\dfrac{A}{2}\cos\omega_2 t$ **(1 point)**

3- $x_1 = A\cos\dfrac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\cos\dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$; $x_2 = A\sin\dfrac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\sin\dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$

$K \approx \dfrac{k_0}{k} << 1$: $\omega_1-\omega_2 = K\omega_1$; $\omega_1+\omega_2 \approx 2\omega_1$

$\Rightarrow x_1(t) = A\cos\left(\dfrac{K\omega_1 t}{2}\right)\cos\omega_1 t,\ x_2(t) = A\sin\left(\dfrac{K\omega_1 t}{2}\right)\sin\omega_1 t$ **(2 points)**

Les oscillations des deux masses présentent des battements $T_b = \dfrac{2\pi}{k\omega_1}$ et oscillent en quadrature.