Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene

Physique 3 (VOM) **Epreuve de rattrapage, le 13 Février 2020** **Année 2019-2020**

Licence L2-ST **Durée 1 h 30 mn**

Exercice 1 (5 points) : Oscillations libre un degré de liberté

Un cylindre plein et homogène, de masse M et de rayon R, peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Ce cylindre est relié à un bâti fixe B_1 par ressort de raideur K au point B (**figure 1**). Un ressort de constante de raideur K_o relie le point A de l'axe du cylindre à un bâti fixe B_2. A l'équilibre, le point A se trouve à l'origine O du système de coordonnées, et le point B est à la verticale au-dessus du point A. On étudie les oscillations de faibles amplitudes du cylindre autour de sa position d'équilibre.

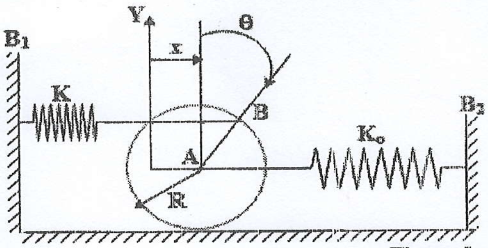

Figure 1

1- Etablir l'équation du mouvement du cylindre

2- Exprimer la période propre T_o du mouvement de ce système en fonction de M, K et K_o.

3-Déterminer l'expression θ(t) en tenant compte des conditions initiales : à **t = 0 s, θ(0) = 5° et $\dot{\theta}(0) = 0$ rd/s.**

Exercice 2 (5 points) : Oscillations libre amorti à un degré de liberté

On remplace le ressort de raideur K par un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux α (**figure 2**).

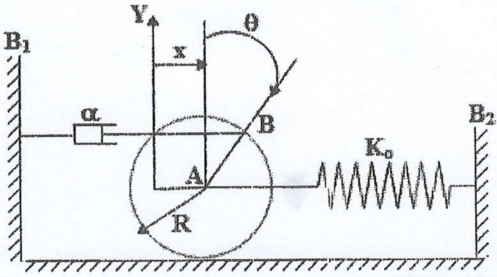

Figure 2

1- Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée θ.

2- On suppose qu'au bout de 4 pseudos périodes, l'amplitude initiale de vibrations est diminuée de 60%. Si la période des oscillations est égale 0,6 s, calculer le facteur d'amortissement α,

3- Calculer l'énergie dissipée du système pendant une période pour une solution approximative : $\theta(t) = \frac{\pi}{16}\cos(\omega_a t)$;

On donne : **M= 2 kg, R= 10 cm, K_o= 120 N/m.**

Exercice 3 (5 points) : Oscillations forcées à un degré de liberté

Le bâti B2 est maintenant soumis à un mouvement horizontal sinusoïdal, son déplacement est donné par S(t)= S_o cos ωt (**figure 3**).

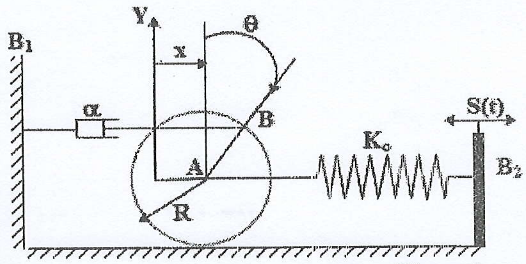

Figure 3

1- Etablir l'équation du mouvement.

2- Donner l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de ω.

3- Calculer l'amplitude S_o sachant qu'à la résonance l'amplitude maximale de θ, vaut $\theta_{max} = \frac{\pi}{10}$.

Exercice 4 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté

Dans le système précédent, on remplace l'amortisseur par un ressort de constante de raideur K'et on insère entre le ressort K_o et le bâti B_2, un oscillateur constitué d'une masse m et d'un ressort de constante de raideur K, pour former un système à deux degrés de liberté (**figure 4**). Le mouvement de la masse m est repéré par la coordonnée x_2. On posera x_1= **Rθ** et on choisira les conditions suivantes :

$$m=\frac{3}{2}M \text{ et } K=4K'.$$

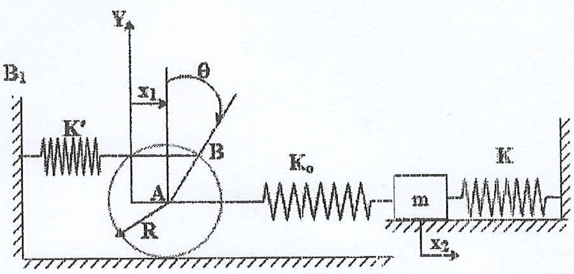

Figure 4

1- Etablir les équations du mouvement en fonction de x_1 et x_2.

2- Calculer les pulsations propres de ce système en fonction de K, K_o et m.

3- Donner les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Physique 3 (VOM)

Corrigé rattrapage du 13 Février 2020 **2019-2020**

Exercice 1

1- $L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(4K+K_0)R^2\theta^2$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{3}\left(\frac{\boxed{4}K+K_0}{M}\right)\theta = 0$ **2 pt**

2- $\omega_0^2 = \left(\frac{4K+2K_0}{M}\right) \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\left(\frac{3M}{\boxed{8}K+2K_0}\right)}$ **1 pt**

3- $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \theta(0) = 43° \;$ et $\dot{\theta}(0) = 0\ \mathrm{rd.s^{-1}} \quad \begin{cases} A = 5° = 0.087\mathrm{rd} \\ \varphi = 0 \end{cases}$ **2 pt**

$$\theta(t) = 0,087\cos(\omega_o t)$$

Exercice 2

1 pt

$L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_0R^2\theta^2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \qquad D = 2\alpha(R\dot{\theta})^2$

$\ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{2K_0}{3M}\theta = 0 \qquad \delta = \frac{4\alpha}{3M} \qquad \omega_o^2 = \frac{2K_0}{3M}$

2- $D = \frac{1}{4}\ln\frac{100}{40} = \boxed{0.23} \qquad \delta = \frac{D}{T_a} \qquad \alpha = \frac{3M\delta}{4} = \frac{3M}{4}\frac{D}{T_a} = \boxed{0.57}\ \mathrm{N.s^{-1}}$ **2pt**

3- $\Delta E = 2R\alpha\left(\frac{\Pi}{16}\right)^2 \omega_a^2 \int_{.0}^{T} \sin\omega_a t\, dt = 2R\alpha\frac{\pi^3}{16^2}\omega_a = \boxed{0.144}\ \mathrm{J}$ **2pt**

Exercice 3

1- $L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K_0R^2(R\theta - s(t))^2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$ **2pt**

$$\ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{2K_0}{3M}\theta = \frac{2K_0S_o}{3MR}\cos\omega t$$

2- $\theta_p(t) = A\cos(\omega t + \emptyset) \qquad A(\omega) = \frac{\frac{2k_0S_o}{3MR}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad \begin{cases} \phi(\omega) = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \\ \sin\phi(\omega) < 0 \end{cases}$ **1pt**

3- $\theta_{max} = \frac{\boxed{\frac{2k_0S_o}{3MR}}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 \boxed{+} \delta^2}} \qquad S_o = \frac{3\pi}{10}\frac{MR\delta}{k_0}\sqrt{\omega_0^2 \boxed{+} \delta^2} \qquad \omega_o = 6.32\frac{rd}{s}, \delta = 1.52s^{-1}.\ S_o \simeq 10\ \mathrm{cm}$ $\boxed{10.6}$ **2 pt**

Exercise 4

1- $L = \frac{3}{4}M{x_1}^2 + \frac{1}{2}m{x_2}^2 - [2K'{x_1}^2 + \frac{1}{2}K{x_{\boxed{2}}}^2 + \frac{1}{2}K_0(x_1-x_2)^2]$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}M\ddot{x}_1 + 4K'x_1 + \boxed{K_0}(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 + K_0(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$ **2pt**

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + Kx_1 + K_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 + K_0(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2- $\begin{bmatrix} -m\omega^2 + (K+K_0) & -K_0 \\ -K_0 & -m\omega^2 + (K+K_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **2pt**

$m\omega^4 - 2m(K+K_0)\omega^2 + 2KK_0 + K^2 = 0 \qquad \omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{K}{m} + \frac{2K_0}{m}$

3. $\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$ **1pt**