Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Epreuve de rattrapage, Novembre 2020, Durée 1 heure

---

Exercice 1 (10 points)

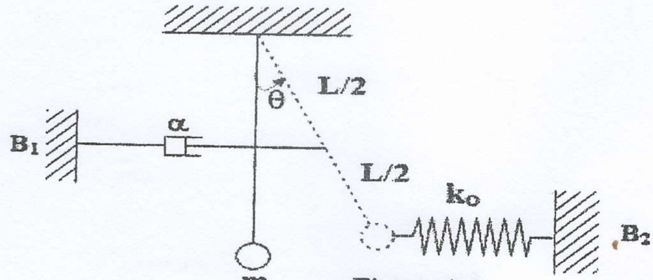


Figure 1-a

Partie I- Dans le système représenté sur la figure 1-a, la tige de longueur L est sans masse. Son extrémité peut osciller sans frottement autour d'un axe passant par O. La masse m fixée à l'autre extrémité de la tige est reliée à un bâti B_2 par un ressort de raideur k_o. Le milieu de la tige est relié par a un bâti fixe B_1 par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.

1- Etablir l'équation du mouvement.

2- On suppose qu'au bout de 4 pseudos périodes, l'amplitude initiale de vibrations est diminuée de 40%. Si la période des oscillations est égale 0,6 s, calculer le facteur d'amortissement δ.

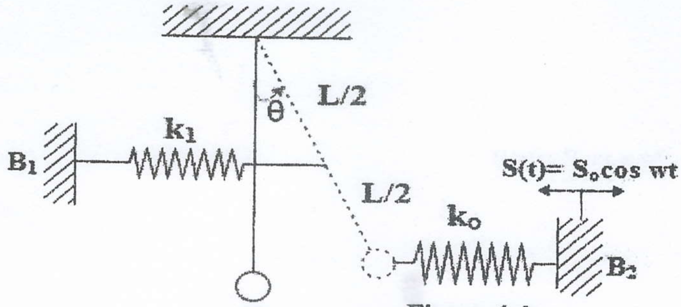


Figure 1-b

Partie II- Le bâti B_2 est maintenant soumis à un déplacement horizontal sinusoïdal (figure 1-b), son déplacement est donné par $S(t) = S_o \cos wt$

1- Ecrire l'équation du mouvement.

2-Donner l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de w.

Exercice 2 (10 points)

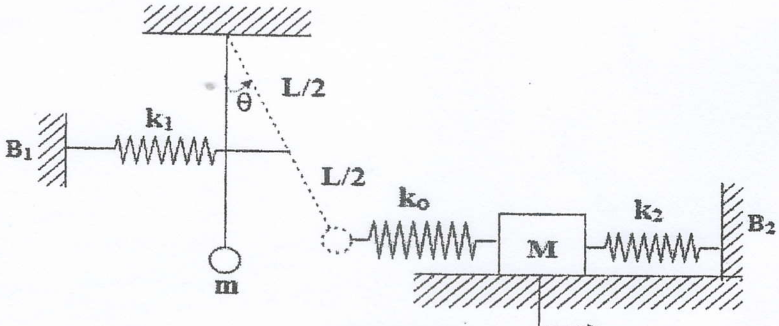


Figure 2-a

Partie I- Dans le système précèdent. On remplace l'amortisseur par un ressort de constante de raideur k_1 et on insère entre le ressort k_o et le bâti B_2, un oscillateur constitué d'une masse M et un ressort de constante de raideur k_2, pour former un système à deux degrés de liberté (figure 2-a). Le mouvement de la masse M est repéré par la coordonnée x_2,

1- En posant : $m = M$, $k_1 = 4k$, $k_2 = 2k$, $\frac{mg}{L} = k$, et $x_1 = L\theta$; Monter que les équations du mouvement s'écrivent: $\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + k_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 + k_0(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$

2- Calculer les pulsations propres de ce système et écrire les solutions générales $x_1(t)$et $x_2(t)$.

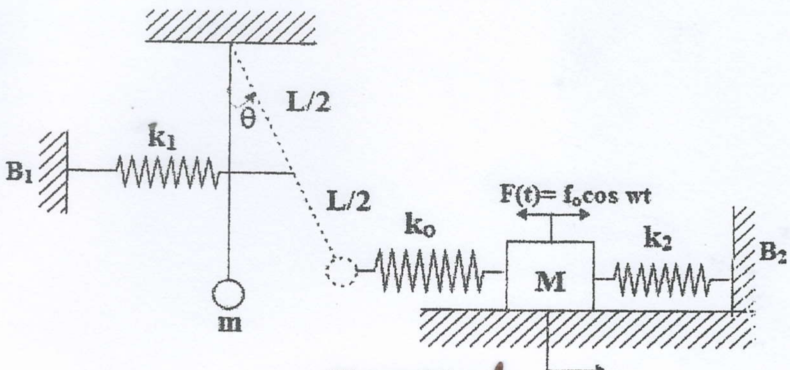


Figure 2-b

Partie II- On applique une force sinusoïdale horizontale ($F(t) = f_o \sin wt$) sur la mase M (figure 2-b).

1- Etablir les équations du mouvent en x_1 et x_2.

2- Donner le schéma électrique équivalent.

Exercice 1

Partie 1 :

1) $E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$ (0.5) $\quad E_p = \frac{1}{2} k_0 l^2 \theta^2 + mg\frac{l}{2}\theta^2$ (1) $\quad D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2$ (1)

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(k_0 l^2 + mg\frac{l}{2}\right)\theta^2$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad (0.25)$$

L'équation de mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta = 0 \quad (1)$$

$$\delta = \frac{\alpha}{8m} \quad (0.25) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}} \quad (0.25)$$

2) Le décrément logarithmique

$$D = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{X_0}{X_n}\right) \quad ici \quad n = 4 \;\rightarrow\; D = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{100}{100-40}\right) = 0.128 \quad (1)$$

Le facteur d'amortissement

$$\delta = \frac{D}{T_a} = \frac{0.128}{0.6} = 0.212\ s^{-1} \quad (0.5)$$

Partie 2 :

1) L'amplitude des oscillations en régime permanent:

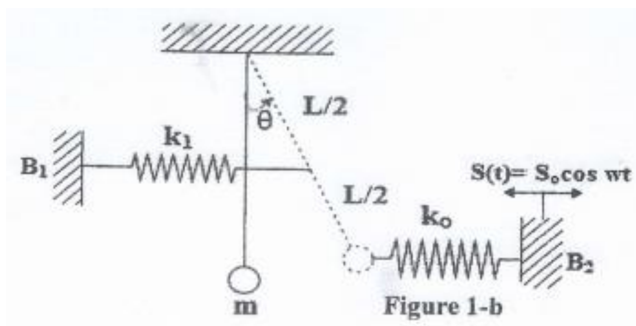


Figure 1-b

Système 1 (affiché dans le sujet)

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad (0.25)$$

$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$ (0.25) $\quad E_p = \frac{1}{2} k_1\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 + mg\frac{l}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}k_0(l\theta - s)^2$ (1)

L'équation de mouvement :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k_1}{4m} + \frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta = \frac{k_0 s_0}{ml}\cos\omega t \quad (1) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{4m} + \frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}} \quad (0.5)$$

$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$

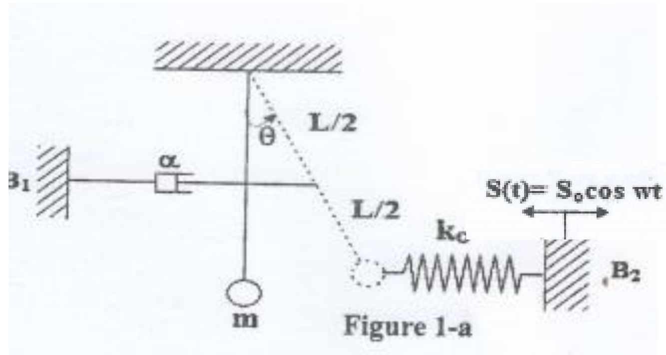
$\theta_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 : pulsation\ propre$

$\theta_p(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi) \quad \omega : pulsation\ d'excitation$

2) La solution

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \mathbf{\Theta}\cos(\omega t + \mathbf{\Phi}) \quad (\mathbf{0.5}) \quad avec \;\; \mathbf{\Theta} = \frac{\boldsymbol{k_0 s_0}}{\boldsymbol{ml}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2})} \quad (\mathbf{0.5})$$

Le système (2) (celui qui était prévu et communiqué à certaines sections lors de l'examen)



1) L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} \quad (0.25)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 \ (0.25) \qquad E_p = mg\frac{l}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}k_0(l\theta - s)^2 \ (1) \qquad D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{2}\dot\theta\right)^2 \ (0.5)$$

L'équation de mouvement :

$$\ddot\theta + \frac{\alpha}{4m}\dot\theta + \left(\frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta = \frac{k_0 s_0}{ml}\cos\omega t \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m} + \frac{g}{l}} \ , \ \delta = \frac{\alpha}{8m} \ : \quad (0{,}5)$$

$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$
$\theta_H(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \phi) \ \longrightarrow 0 \ \ en\ régime\ permanent$
$\theta_p(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)$

2) <u>L'amplitude en régime permanent</u>

$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)$$

$$avec\ \ \boldsymbol{\Theta} = \frac{\boldsymbol{k_0 s_0}}{\boldsymbol{ml}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2 + \mathbf{4}\boldsymbol{\delta^2\omega^2}}} \quad (\mathbf{0.5})$$

Les deux traitements sont acceptés en correction (ou l'un ou l'autre)

<u>Exercice 2 :</u>

Partie 1 :

1) Les équations de mouvement

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\dot x_2^2 \ (0.5) \qquad E_p = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 + mg\frac{l}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}k_0(l\theta - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 \ (1)$$

$$x_1 = l\theta \quad k_1 = 4k \quad k_2 = k \quad \frac{mg}{l} = k \quad M = m$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 \qquad E_p = \frac{1}{2}\frac{k_1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad (0.5) \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2 + kx_2^2 \ (1)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - k\,x_1^2 - \frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2 - kx_2^2$$

Les équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + k_0(x_1-x_2) = 0 \quad (1) \qquad (0.5) \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 + k_0(x_2-x_1) = 0 \quad (2) \qquad (0.5) \end{cases}$$

3) Les pulsations propres :

Système symétrique ; on effectue le changement de variables

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} (1)+(2): \quad m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) + 2k(x_1+x_2) = 0 \rightarrow X_1 + \frac{2k}{m}X_1 = 0 \ (0.5) \rightarrow \boldsymbol{\omega_1} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2k}}{\boldsymbol{m}}} \quad (0.5) \\ (1)-(2): \quad m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + 2k(x_1-x_2) + 2k_0(x_1-x_2) = 0 \ (0.5) \rightarrow X_2 + \frac{2k+2k_0}{m}X_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{\omega_2} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2k+2k_0}}{\boldsymbol{m}}} \ (\boldsymbol{0.5}) \end{cases}$$

$$X_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$X_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(X_1+X_2) = \frac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)) \ (0.5) \\ x_2 == \frac{1}{2}(X_1-X_2) = \frac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)) \ (0.5) \end{cases}$$

Partie 2 :

1) Les équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + k_0(x_1-x_2) = 0 \qquad (0.5) \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 + k_0(x_2-x_1) = F_0\cos\omega t \quad (0.5) \end{cases}$$

2) Les équations électriques

$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + \frac{2q_1}{C} + \frac{1}{C_0}(q_1-q_2) = 0 \\ L\ddot{q}_2 + \frac{2}{C}q_2 + \frac{1}{C_0}(q_2-q_1) = e_0\cos\omega t \end{cases} \quad (0.5)$$

Système à 2DDL ; donc deux mailles

Elément de couplage C_0

Le schéma (1)