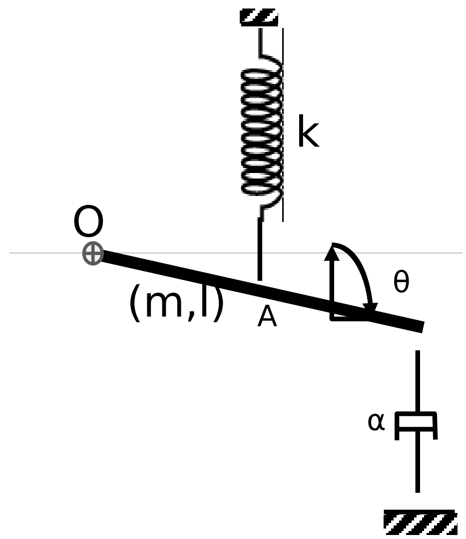
Epreuve finale (durée : 1h00)

Exercice 1 : (10 points)

Une barre de masse m de 1kg et de longueur l peut pivoter autour de l'axe passant par son extrémité O. On s'arrange pour qu'à l'état initial, la barre soit horizontale. Θ est l'angle que fait cette barre par rapport à l'axe horizontal passant par O.

Partie 1 : Oscillation amortie à 1DDL



1. *Déterminer l'équation de mouvement et donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ.*
2. *La barre écartée de sa position d'équilibre puis relâchée, effectue 5 oscillations en 2s et que l'amplitude de $\theta(t)$ diminue de moitié après ces 5 oscillations. A partir de ces deux observations, déterminer les valeurs des constantes k et α.*

Partie 2 : Oscillation forcée à 1DDL

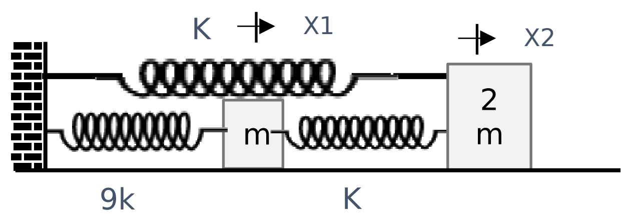
3. *On applique une force sinusoïdale au point A qui agit verticalement à la barre, trouver, dans ce cas, l'équation de mouvement qui gère le déplacement angulaire $\theta(t)$.*

   On donne l'équation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=-\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right)+F\frac{l}{2}$
4. *Donner la solution $\theta(t)$ en régime permanent en spécifiant les différentes constantes intervenantes dans son expression*

Exercice 2 : (10 points)

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k. Une des masses est relié à un bâti fixe à l'aide d'un ressort de raideur 9k et l'autre par un ressort de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.

Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et x_2 (t).



Partie 1 : Oscillation libre non amortie à 2DDL

1. *Etablir les équations différentielles de mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.*
2. *Trouver les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 du système en fonction de $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et donner les solutions $x_1(t)$ et x_2 (t). Sachant, que les rapports d'amplitude sont :* $\mu_1=9\ et\ \mu_2=-0.05$

Partie 2 : Oscillation forcée à 2DDL

3. *Une force sinusoïdale $F=F_0 \sin \omega t$ est appliquée sur la masse 2 qui agit horizontalement pour faire osciller le système. Ecrire les équations de mouvement pour* ***$x_1(t)$ et x_2 (t).***
4. *Trouver les expressions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en régime permanent (utiliser la forme complexe)*

SOLUTION

Exercice 1 :

1. C'est un oscillateur amorti à 1 DDL donc : (1,5)

- Energie cinétique : $E_c=\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\theta}^2\ J_O=moment\ d'inertie\ de\ la\ barre$/ extrémité O
- Energie potentielle : La gravité est compensée par l'élongation initiale du ressort.

  L'élastique : $E_e=\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2=\frac{1}{8}k\,l^2\theta^2\ ressort\ connecté\ au\ milieu$
- $La\ fonction\ de\ Lagrange\ L=\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{8}k\,l^2\theta^2$
- $La\ fonction\ de\ dissipation\ D=\frac{1}{2}\alpha$ ¿
- $C'est\ système\ libre\ amorti: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\left(\frac{\partial D}{\partial\dot{q}}\right)$

$$\frac{m\,l^2}{3}\ddot{\theta}+\alpha l^2\dot{\theta}+\frac{1}{4}k\,l^2\theta=0\rightarrow\ddot{\theta}+\frac{3\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{3k}{4m}\theta=0\ avec\ \omega_0=\sqrt{\frac{3k}{4m}}\ et\ \delta=\frac{3\alpha}{2m}$$

2. Détermination de $\alpha\ et\ de\ k$

$$durée\ de\ 5\ oscillations=2\,s\ donc\ T_a=\frac{2}{5}=0.2\,s$$

$$ampltitude\ résuite\ de\ 50\%\rightarrow D=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1000\%}{100\%-50\%}\right)=0.2\ln(2)=0.13$$

$$\delta=\frac{D}{T_a}=\ln(2)=0.69\,s^{-1}\ comme\ \frac{3\alpha}{2m}=\delta\rightarrow\alpha=\frac{2m\delta}{3}=0.46\,kg.s.m-1$$

$$d'autre\ part\ \omega_a=\frac{2\pi}{T_a}=10\pi\rightarrow\omega_a=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\rightarrow\omega_0=\sqrt{\omega_a^2+\delta^2}=31.4\,rad.s^{-1}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3k}{4m}}\rightarrow k=\frac{4m\omega_0^2}{3}=119.7\,kg.s^{-1}$$

3. L'équation de mouvement : on peut reprendre l'

$$\frac{m\,l^2}{3}\ddot{\theta}+\alpha l^2\dot{\theta}+\frac{1}{4}k\,l^2\theta=\frac{l}{2}F_0\sin(\omega t+\Phi)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{3k}{4m}\theta=\frac{F_0}{2l}\sin(\omega t+\Phi)$$

4. $En\ régime\ permanent$:

$$\theta(t)=\Theta\sin(\omega t+\Phi)$$

$$avec\ \Theta=\frac{F_0/2l}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\ et\ \Phi=atan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

Exercice2 :

1. Les équations de mouvement

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}(9k)x_1^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}k\,x_2^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+10k\,x_1-k\,x_2=0\\ 2m\ddot{x}_2+2k\,x_2-k\,x_1=0\end{cases}$$

2. On cherche des solutions du type sinusoïdal : $\begin{cases}x_1=A\cos(\omega t+\phi_1)\rightarrow \ddot{x}_1=-\omega^2 x_1\\ x_2=B\cos(\omega t+\phi_2)\rightarrow \ddot{x}_2=-\omega^2 x_2\end{cases}$

   Les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{cases}(10k-m\omega^2)x_1-k\,x_2=0\\ 2(k-m\omega^2)x_1-k\,x_2=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(10\,\omega_0^2-m\omega^2)\,x_1-\omega_0^2 x_2=0\\ 2\left(\omega_0^2-m\,\omega^2\right)x_2-\omega_0^2\,x_1=0\end{cases} \equiv \begin{cases}(10\,\omega_0^2-\omega^2)x_1-\omega_0^2 x_2=0\\ -\omega_0^2 x_1+2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x_2=0\end{cases}\ (I)$$

- Les pulsations propres : Ce système homogène qui n'a de solutions non nulles que si le déterminant est nul.

$$(10\,\omega_0^2-\omega^2)(2\omega_0^2-2\,\omega^2)-(-\omega_0^2)(-\omega_0^2)=0$$

$$2\,\omega^4-22\,\omega_0^2\omega^2+19\,\omega_0^4=0\rightarrow \Omega=\omega^2\rightarrow \Omega^2-3\omega_0^2\Omega+\omega_0^4=0$$

Qui a pour solution $\Omega_{1,2}=0.5\left(11\pm\sqrt{83}\right)\omega_0^2\ d'ou\ \omega_{1,2}=\sqrt{0.5\left(11\pm\sqrt{83}\right)}\,\omega_0$

$\omega_1=0.972\,\omega_0\ et\ \omega_2=3.171\,\omega_0$

Toute solution doit être en focntion des modes propres $\cos(\omega_1 t+\phi_1)$ *et* $\cos(\omega_2 t+\phi_1)$.

- Les solutions générales s'écrivent donc grâce au principe de superposition comme suit :

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$
$$x_2=B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$
$$\mu_1=\frac{B_1}{A_1}\ et\ \mu_2=\frac{B_1}{A_1}$$

$$\begin{matrix}x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\\ x_2=\mu_1 A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+\mu_2 A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\\ x_2=9\,A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-0.05\,A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\end{matrix}$$

3. On peut reprendre les équations de mouvement :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+10k\,x_1-k\,x_2=0\\ 2m\ddot{x}_2+2k\,x_2-k\,x_1=F_0\sin\omega t\end{cases}$$

4. Les solutions en régime permanent :

$$\begin{matrix}x_1=A_1\cos(\omega t+\phi_1)=--\rightarrow \overline{A}_1 e^{i\omega t}\ avec\ \overline{A}_1=A_1 e^{i\Phi_1}\\ x_2=A_2\cos(\omega t+\phi_2)=--\rightarrow \overline{A}_2 e^{i\omega t}\ avec\ \overline{A}_2=A_2 e^{i\Phi_2}\end{matrix}\ et\ F=F_0\sin\omega t=-\rightarrow -iF_0 e^{i\omega t}$$

   Après remplacement et simplification des $e^{i\omega t}$ on obtient :

$$\begin{cases} -\omega^2 m\overline{A}_1+10k\overline{A}_1-k\overline{A}_2=0 \\ 2m\overline{A}_2+2k\overline{A}_2-k\overline{A}_1=-iF_0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \left(10k-\omega^2 m\right)\overline{A}_1-k\overline{A}_2=0 \\ -k\overline{A}_1+\left(2k-2m\omega^2\right)\overline{A}_2=-iF_0 \end{matrix}$$

On utilise la méthode de Cramer pour résoudre ce système d'équations algébrique :

$$\overline{A}_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -k \\ -iF_0 & 2k-2m\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-2m\omega^2 \end{vmatrix}} \; et \; \overline{A}_2=\frac{\begin{vmatrix} 10k-\omega^2 m & 0 \\ 0-k & -iF_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-2m\omega^2 \end{vmatrix}}$$