Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Examen de rattrapage, Samedi 08 Mai 2021, Durée 1 heure

Exercice 1 (10 points) : Système libre et forcé à un degré de liberté

Une tige homogène de masse M= 2Kg et de longueur L= 6a, pivote sans frottement autour d'un axe fixe passant par le point O distant de a = 10 cm du centre de gravité G. l'extrémité de la tige est reliée au point A à deux bâtis, le bâtis B_1 par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur K et le bâtis B_2 par un amortisseur de coefficient d'amortissement α (Figure 1). A l'équilibre la tige est en position verticale. On considèrera uniquement les oscillations de faible amplitude.

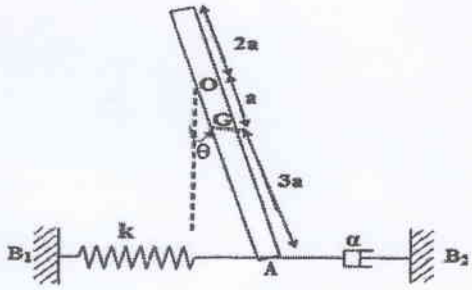

Figure 1

1- Etablir l'équation de mouvement du système en fonction de θ en précisant les expressions de δ et ω_0.

2- Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initial, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo période $T_a = 0.6$ s.

On constate au bout de 2 pseudos périodes que l'élongation des oscillations à diminuée de 70 % de l'élongation initiale. Calculer la valeur du coefficient d'amortissement α et en déduire la valeur de K.

3- Le bâtis B2 est maintenant soumis à un mouvement horizontal et harmonique : $s(t) = S_0 \sin \omega t$ (Figure 2). Etablir l'équation du mouvement.

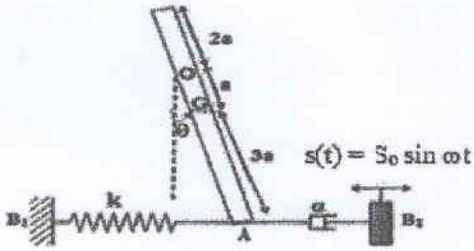

Figure 2

4- Donner l'amplitude de l'angle d'écart θ de la tige en régime permanent. Puis pour $\omega=\omega_0$ donner l'expression de la réponse du système en fonction de K, S_0, ω_0, ω, a et δ

Exercice 2 (10 points) : Système libre et forcé à deux degrés de liberté

Le système représenté sur la Figure 3, est constitué par une masse 2m reliée à un bâti fixe B_1 par un ressort de raideur K. Un ressort de raideur K_0, la relie à un cylindre plein et homogène, de masse M, de rayon R qui peut osciller sans frottement autour de son axe de révolution horizontal (O). Ce dernier est relié à un bâti fixe B_2 par un une masse m avec un ressort intermédiaire de constante de raideur K. on considérera les mouvements de faibles amplitudes.

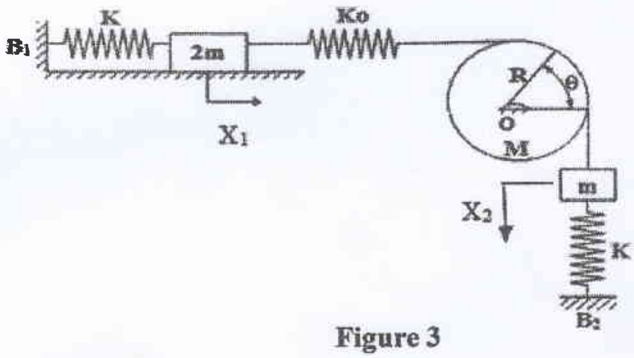

Figure 3

1- En posant $m = \frac{M}{2}$, $X_2 = R\theta$. Etablir les équations du mouvement en X_1 et X_2.

2- Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système mécanique.

3- On remplace le ressort entre la masse m et le bâti B_2 par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et On applique une force sinusoïdale horizontale ($F(t)= F_0\sin\omega t$) sur le cylindre (Figure 4). Etablir les équations du mouvement en X_1 et X_2.

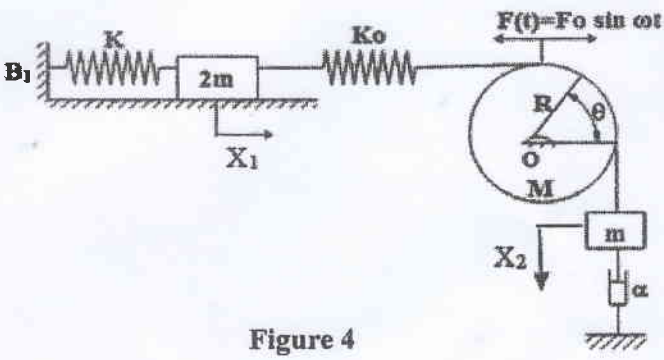

Figure 4

4- On suppose que $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $K_0 = K$; Trouver la solution de $\dot{X}_1(t)$ et $\dot{X}_2(t)$ en régime permanent pour : $\omega = \omega_0$.

Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Solution de l'Examen de Rattrapage, Samedi 08 Mai 2021

Exercice 1 (10 points) : Système libre à un degré de liberté

1- $T=\frac{1}{2}J_{(\Delta)}\dot{\theta}^2 = 2Ma^2\dot{\theta}^2$; $U=\frac{1}{2}(16a^2k+mga)\theta^2$ et $D=4\alpha\dot{\theta}^2$. **(3 points)**

Le lagrangien $L=2Ma^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}(16ka^2+Mga)\theta^2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$ $\quad 4Ma^2\ddot{\theta}+16\alpha a^2\dot{\theta}+(16Ka^2+Mga)\theta=0$ $\quad \ddot{\theta}+4\frac{\alpha}{M}\dot{\theta}+(\frac{4k}{M}+\frac{g}{4a})\theta=0$

2- $D=\frac{1}{2}\ln\frac{100}{30}=0.6$ $\quad \delta=\frac{2\alpha}{M}=\frac{D}{T_a}=1\ s^{-1}$ $\quad \alpha=\frac{DM}{2T_a}=1\ kg.s^{-1}$ **(3 points)**

$\omega_a^2=\omega_0^2-\delta^2$ $\quad \omega_0^2=\omega_a^2+\delta^2=(\frac{2\pi}{T_a})^2+(\frac{D}{T_a})^2=10{,}5$ rd.s^{-1} $\quad K=\frac{M}{4}(\omega_0^2-\frac{g}{a})=$ **42.62 N/m**

3- $D=\frac{1}{2}\alpha(4a\dot{\theta}-\dot{s}(t))^2$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$ **(2 points)**

$4Ma^2\ddot{\theta}+4\alpha a^2\dot{\theta}+(16Ka^2+4Mga)\theta=a\alpha S_0\cos\omega t$ $\quad \ddot{\theta}+\frac{\alpha}{M}\dot{\theta}+(4\frac{k}{M}+\frac{g}{a})\theta=\frac{\alpha\omega S_0}{4Ma}\sin\omega t$

4- $\theta_p(t)=\theta(\omega)\cos(\omega t+\emptyset)$ $\quad \theta(\omega)=\frac{\frac{\alpha\omega S_0}{4Ma}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$ $\quad \theta_{max}(\omega)=\frac{\frac{\alpha\omega S_0}{4Ma}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$ **(2 points)**

Exercice 2 (10 points) : Système libre et forcé à deux degrés de liberté

1- $T=\frac{1}{2}(M)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}j_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$; $j_0=\frac{MR^2}{2}$ $\quad T=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$

$U=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}kx_2^2$

$$\begin{cases}M\ddot{x}_1+(K+K_o)x_1-K_ox_2=0\\ M\ddot{x}_2+(K+K_o)x_2-K_ox_1=0\end{cases}$$ **(3 points)**

2- $\omega_1^2=\frac{K}{M}$ $\quad \omega_2^2=\frac{K+2K_o}{M}$ **(2 points)**

3 $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

$$\begin{cases}M\ddot{X}_1+(K+K_o)X_1-K_oX_2=0\\ M\ddot{X}_2+\alpha\dot{X}_1+(K+K_o)X_2-K_oX_1=R\,F(t)\end{cases}$$ **(2 points)**

4- **Pour** $\omega_o=\sqrt{\frac{K}{M}}$ et $K=K_o$; On trouve : $\begin{cases}\ddot{X}_1+2\omega_0^2X_1-\omega_0^2X_2=0\\ \ddot{X}_2+\frac{\alpha}{M}\dot{X}_2+\omega_0^2(X_2-X_1)=\frac{R}{M}F(t)\end{cases}$

On pose que : $\dot{X}_r(t)=\overline{\dot{X}_r}e^{j\omega t}$ $\quad \frac{d\dot{X}_r}{dt}=j\omega\dot{X}_r(t)$ $\quad \int\dot{X}_rdt=\frac{-j\dot{X}_r(t)}{\omega}$ $\quad r=1,2$

$\frac{d\dot{X}_1}{dt}+2\omega_0^2\int\dot{X}_1dt-\omega_0^2\int\dot{X}_2dt=0$ $\quad j\omega\dot{X}_1-2j\frac{\omega_0^2}{\omega}\dot{X}_1+j\frac{\omega_0^2}{\omega}\dot{X}_2=0$

$\frac{d\dot{X}_2}{dt}+\frac{\alpha}{M}\dot{X}_2+\omega_0^2(\int\dot{X}_2dt-\int\dot{X}_1dt)=\frac{R}{M}F_0e^{jwt}$ $\quad j\omega\dot{X}_2-2j\frac{\omega_0^2}{\omega}(\dot{X}_2-\dot{X}_1)+j\frac{\omega_0^2}{\omega}\dot{X}_2=\frac{R}{M}F_0e^{j\omega t}$

Pour $\omega=\omega_o$; On trouve à partir de :

Première équation : $j\omega\dot{X}_1+j\omega\dot{X}_2=0$ $\quad \dot{X}_1=\dot{X}_2$

Deuxième équation : $\dot{X}_1(t)=\dot{X}_2(t)=\frac{jRF_0}{-M\omega+j\alpha}e^{j\omega t}$ **(3 points)**