

SOLUTIONS DES EXERCICES

A- Oscillations libres

$$T = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}Kl^2(\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1)$$

Or pour les petites oscillations nous avons :

$$\sin \theta = \theta \quad \text{et} \quad \cos \theta = (1 - \frac{\theta^2}{2})$$

$$U = \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_2^2 - kl^2\theta_1\theta_2$$

Le lagrangien sera donc

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta_2^2 + kl^2\theta_1\theta_2$$

Les équations de Lagrange

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 & (I) \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 & (II) \end{cases}$$

Effectuons le changement de variable suivant

$$\Phi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \Phi_2 = \theta_1 - \theta_2$$

$$(I)+(II) : ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (mgl + kl^2)(\theta_1 + \theta_2) - kl^2(\theta_2 + \theta_1) = 0$$

$$ml^2\ddot{\Phi}_1 + (mgl + kl^2)\Phi_1 - kl^2\Phi_1 = 0$$

$$\ddot{\Phi}_1 + \frac{g}{l}\Phi_1 = 0 \quad (I)'$$

$$(II)-(I) : ml^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + (mgl + kl^2)(\theta_1 - \theta_2) + kl^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$ml^2\ddot{\Phi}_2 + (mgl + kl^2)\Phi_2 + kl^2\Phi_2 = 0$$

$$\ddot{\Phi}_2 + (\frac{2k}{m} + \frac{g}{l})\Phi_2 = 0 \quad (II)'$$

Les deux équations (I)' et (II)' sont des équations indépendantes régissant l'oscillateur harmonique dont la solution générale est de la forme $\Phi_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \gamma_1)$ et $\Phi_2(t) = B \cos(\omega_2 t + \gamma_2)$

$$\text{Où } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

Revenons aux variables initiales

$$\Phi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \Phi_2 = \theta_1 - \theta_2$$

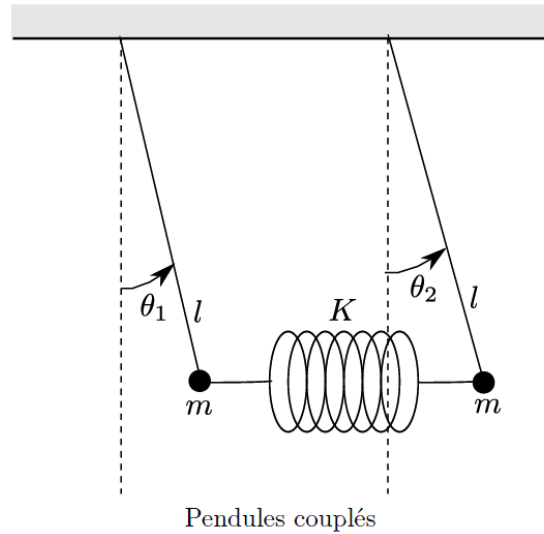
$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

D'où

$$\theta_1(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \gamma_2)$$

$$\theta_2(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \gamma_1) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \gamma_2)$$

Appliquons les conditions initiales



pour $t = 0$ $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(0) = \theta_0$

Cela donne

$$\begin{aligned}\frac{A}{2} \cos \gamma_1 + \frac{B}{2} \cos \gamma_2 &= 0 \\ \frac{A}{2} \cos \gamma_1 - \frac{B}{2} \cos \gamma_2 &= \theta_0\end{aligned}$$

Par suite on a

$$A \cos \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad B \cos \gamma_2 = -\theta_0$$

Et pour $t = 0$ $\dot{\theta}_1(0) = 0$ et $\dot{\theta}_2(0) = 0$ ce qui donne

$$A \omega \sin \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad B \omega \sin \gamma_2 = 0$$

Ce qui donne

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \Rightarrow A = -B = \theta_0$$

Les solutions générales sont donc

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$$

A l'aide d'une transformation trigonométrique la relation précédente peut s'écrire sous la forme

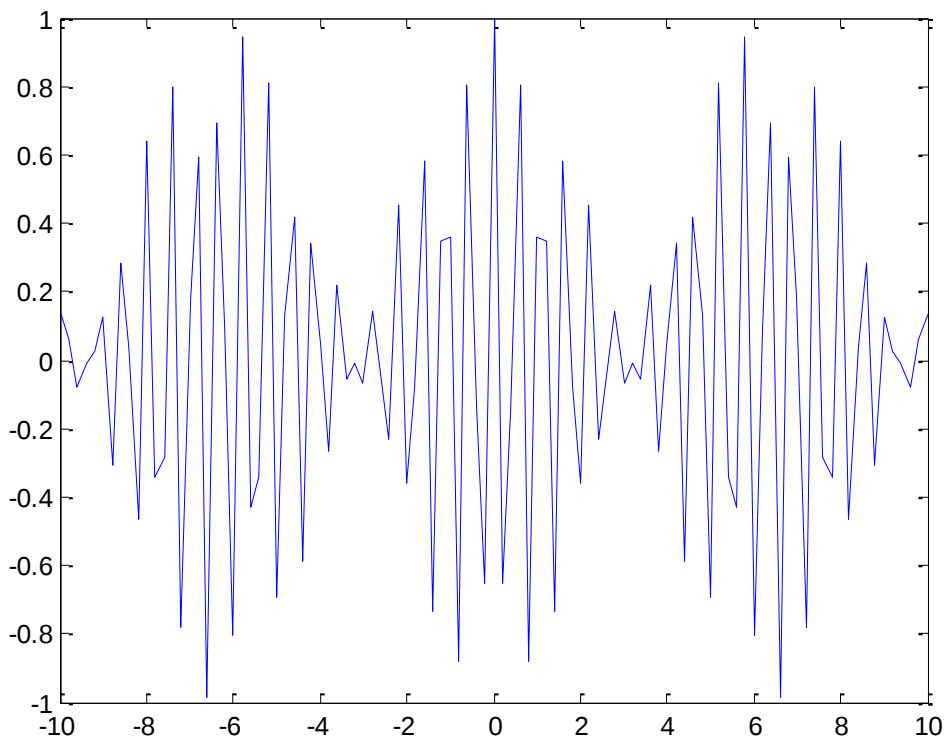
$$\theta_1(t) = -\theta_0 \left[\sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t * \sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \right]$$

La deuxième solution est

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

A l'aide d'une transformation trigonométrique la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\theta_2(t) = \theta_0 \left[\cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t * \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \right]$$



Tracé de la fonction $f(x) = \cos(0.5*x) * \cos(20*x)$