Exo3 : Pendule double

a) Les équations de mouvement

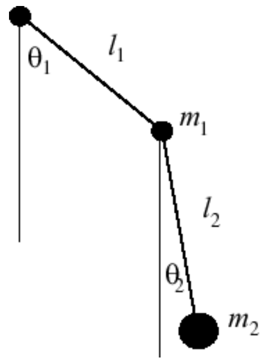
On se place dans l'approximation des petites oscillations et que

$$l_1 = l_2 = l \qquad m_1 = 2m\,, \qquad m_2 = m$$

Nous rappelons que

$|\vec{v}_1| = l\dot{\theta}_1 \;, |\vec{v}_{2r/1}| = l\dot{\theta}_2 \;\;, \phi = \;(\widehat{v_1, \vec{v}_{2r/1}}) = \theta_1 - \theta_2$

$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1 + \vec{v}_{2r/1}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_{2r/1}|^2 + |\vec{v}_1|.|\vec{v}_{2r/1}|.\cos(\phi)}$



$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

$$T = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

On prend $\cos(\theta_1 - \theta_2) \cong 1$ *car le terme contient* $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ *est déjà au* 2^{nd} *ordre.*

Si on prend l'origine de l'énergie potentielle de gravitation au niveau du point O

$U = -m_1 g\, l\cos\theta_1 - \; m_2 g\,(l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2) \qquad , \qquad \cos(\theta) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$U = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)gl\theta_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 gl\theta_2^2 + Cste$

$L = T - U$

$L = \dfrac{1}{2}m_1 l^2\dot{\theta}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 l^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2] - \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)gl\theta_1^2 - \dfrac{1}{2}m_2 gl\theta_2^2 - Cste$

$m_1 = 2m \quad , \quad m_2 = m$

$L = \dfrac{3}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \dfrac{3}{2}mgl\theta_1^2 - \dfrac{1}{2}mgl\theta_2^2 - Cste$

Appliquons les équations de Lagrange ; on obtient les équations du mouvement

$$\begin{cases} 3ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 3mgl\theta_1 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 + \frac{1}{3}\ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 + \;\ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases}} \qquad \textbf{(II)}$$

où $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$

b) Les pulsations propres

Posons $\quad \theta_1 = A\cos(\omega t + \phi) \quad$ *et* $\quad \theta_2 = B\cos(\omega t + \phi)$

On remplace dans les équations de mouvement, on obtient

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A - \dfrac{1}{3}\omega^2 B = 0 \\ -\omega^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}$$

La solution existe si le déterminant est nul, on obtient l'équation aux valeurs propres

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{1}{3}\omega^4 = 0$$

$$On\ obtient \quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}\,\omega_0 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}\,\omega_0 \;\; et \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}\,\omega_0 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\,\omega_0}$$

c) Les rapports d'amplitude

Les solutions s'écrivent donc de la façon suivante :

$\theta_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \; A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$

$\theta_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \; B_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$

Au premier mode : $\omega = \omega_1$

$\theta_1 = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1)$

$\theta_2 = B_1 cos(\omega_1 t + \phi_1)$

on remplace dans le système (II) on obtient :

$$\begin{cases}(\omega_0^2 - \omega_1^2)A_1 - \frac{1}{3}\omega_1^2 B_1 = 0 \\ -\omega^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)B_1 = 0\end{cases}$$

On trouve $\boxed{\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \sqrt{3}}$

Au second mode : $\omega = \omega_2$

$\theta_1 = A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$

$\theta_2 = B_2 cos(\omega_2 + \phi_2)$

on remplace dans le système (II) on obtient :

$$\begin{cases}(\omega_0^2 - \omega_2^2)A_2 - \frac{1}{3}\omega_2^2 B_2 = 0 \\ -\omega_2^2 A_2 + (\omega_0^2 - \omega_2^2)B_2 = 0\end{cases}$$

On trouve $\boxed{\mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\sqrt{3}}$

D'où les solutions sont :

$\theta_1 = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$

$\theta_2 = \sqrt{3} A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) - \sqrt{3} A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$

ou A_1 , A_2, ϕ_1, ϕ_2 *sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales*