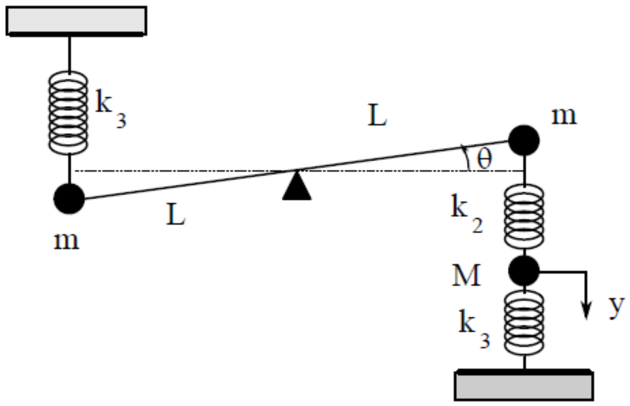
Exo7 :

1°/Les équations différentielles régissant les petites oscillations

Avec $k_1 = k_2 = k \quad et\ M = 2m$



$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{y}^2 + 2\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$
$$= m(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2) \quad , \quad J = ml^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(l\theta^2) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k(y - l\theta)^2$$
$$= ky^2 + kl^2\theta^2 - kl\theta y$$

$$L = T - U = m(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2) - \ ky^2 - kl^2\theta^2 + kl\theta y$$

Les deux équations différentielles pour y et θ deviennent comme suit :

$$\begin{cases} 2m\ddot{y} + 2ky - kl\theta & = 0 \\ 2ml^2\ddot{\theta} + 2kl^2\theta - kly & = 0 \end{cases}$$

2°/ Les pulsations propres et les rapports d'amplitude

Cherchons les solutions sont de la forme

$$y = A_1 e^{i(\omega t + \phi)}$$
$$y = A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$$

On obtient le système d'équation scalaire suivant :

$$\begin{cases} -2m\omega^2 A_1 + 2k\ A_1 - klA_2 = 0 \\ -2ml^2\omega^2 A_2 + 2kl\ A_2 - klA_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(k - m\omega^2)A_1 - klA_2 & = 0 \\ -kA_1 - 2l(k - m\omega^2)A_2 & = 0 \end{cases}$$

Pour qu'une solution non triviale existe pour ce système ; il faut que le déterminant soit nul.

$$\begin{vmatrix} 2(k - m\omega^2) & -kl \\ -k & 2l(k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4l(k - m\omega^2)^2 - k^2 l = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2\omega^4 - 8km\omega^2 + 4k^2 - k^2 = 0$$

$$\text{Si on pose } \Omega \ = \ \omega^2 \quad on\ a\ 4m^2\Omega^2 - 8km\Omega + 3k^2 = 0$$
$$\Delta = 16k^2m^2 - 12k^2m^2 \ = 4k^2m^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 \ = \frac{1}{m}(k \pm \frac{k}{2})$$

Les pulsations propres sont donc

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

Chacune des coordonnées y et θ possèdent deux composantes harmoniques $\omega_1\ et\ \omega_2$

$$y = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\theta = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ou $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \phi_1\ et\ \phi_2$ sont des constantes.

<u>1er mode d'oscillation : $\omega = \omega_1$</u>

Lorsque A_{12}, A_{22} =0 on dit que le système oscille dans le premier mode (mode fondamental) et dans ce cas :

$$y = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$\theta = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

2nd mode d'oscillation : $\omega = \omega_2$

Et lorsque A_{11}, A_{21} =0 on dit que le système oscille dans le premier mode (mode fondamental) et dans ce cas :

$$y = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\theta = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Les rapports d'amplitudes :

Au premier mode : $\omega = \omega_1$ remplaçons dans le système d'équation nos obtenons

$$\begin{cases} 2(k - m\omega_1^2)A_{11} - klA_{21} \quad = 0 \\ -kA_{11} - 2l(k - m\omega_2^2)A_{21} = 0 \end{cases}$$

Au second mode : $\omega = \omega_2$ remplaçons dans le système d'équation nos obtenons

$$\begin{cases} 2(k - m\omega_1^2)A_{12} - klA_{22} \quad = 0 \\ -kA_{12} - 2l(k - m\omega_2^2)A_{22} = 0 \end{cases}$$

Le premiersystème d'équation nous donne $\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{2k-2m\omega_1^2}{kl} = \frac{1}{l}$

Le deuxième système d'équations nous donne $\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k}{2l(k-2m\omega_2^2)} = -\frac{1}{l}$

Par suite nos deux solutions générales s'écrivent comme suit :

$$y = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\theta = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ou A_{11}, A_{12} , ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions initiales

3°/Les solutions généralesy(t) et θ(t).

Les solutions sont des combinaisons des deux modes propres

$$\mathrm{y(t)} = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega t_2 + \phi_2)$$
$$\theta\mathrm{(t)} = \frac{A_{11}}{l}\cos(\omega t_1 + \phi_1) - \frac{A_{12}}{l}\cos(\omega t_2 + \phi_2)$$

Il y a 4 inconnus à savoir A_1, A_2, ϕ_1 et ϕ_2 qui seront déterminés à l'aide des conditions initiales