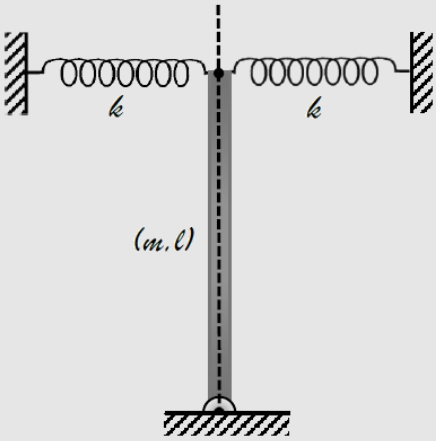
Mouvement de rotation

On considère une barre rigide uniforme qui pivote à une extrémité et qui est connectée symétriquement par deux ressorts à l'autre extrémité, comme le montre la figure; On suppose la masse de la barre égale à *m* et les ressorts au repos lorsque la barre est verticale.
(a) Etablir l'équation du mouvement du système.
(b) Donner et discuter la solution dans les trois cas qui se présentent.



Solution :

a) La barre effectue des petites rotations autour de la position d'équilibre (position verticale)
La coordonnée généralisée adéquate dans ce cas est θ. Son énergie cinétique est donc:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

La barre tourne par rapport à son extrémité son moment d'inertie est dans ce cas

$$J = \frac{ml^2}{3} \quad \text{son énergie cinétique devient } T = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Son énergie potentielle est composée de l'énergie potentielle gravitationnelle *Ug* et de l'énergie potentielle élastique *Ue*.

$$\text{Ue des deux ressorts est: } Ue = kl^2\theta^2$$

Pour l'énergie potentielle gravitationnelle on prend la position d'équilibre comme origine.
Le centre de masse est à une distance $\frac{l}{2}$. Lorsque la barre tourne d'un angle θ le centre de masse descend d'une distance

$$\Delta h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{l}{4}\theta^2 \quad avec\;\; cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}\; pour\; des\; petits\; angles\; \theta$$

$$Ug = -mg\Delta h = -\frac{1}{4} mgl\theta^2$$

$$\text{L'énergie potentielle totale est donc } U = Ue + Ug = kl^2\theta^2 - \frac{1}{4} mgl\theta^2$$

$$\text{Le Lagrangien s'écrit donc comme suit: } \mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{U} = \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2 - kl^2\theta^2 + \frac{1}{4} mgl\theta^2$$

Comme c'est un système libre à 1 degré de liberté l'équation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ permet d'aboutir à l'équation de mouvement:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \left(2kl^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right)\theta = 0 \qquad (I)$$

Le coefficient de θ n'est pas positif tout le temps et donc on ne peut pas le substituer par ω_0^2. Selon les caractéristiques du système cette grandeur peut être positif, négatif ou nul.

1. $\left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right) > 0$

   Dans ce cas on peut dire $\omega_0^2 = \left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right)$

   $$\text{Léquation de mouvement (I)devient } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

   C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. La solution de cette équation est de la forme

   $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}}$

2. $\left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right) = 0$

   $\text{L'équation (I) } deveient\ \ddot{\theta} = 0 \quad \dot{\theta} = a, \quad \theta = at + b \quad \text{avec a, b des constantes d'intégration}$

   L'angle varie linéairement en fonction du temps.

3. $\left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right) < 0$

   $$Le\ terme\ k^2 = -\left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right) \text{ est positif l'équation(I) devient}$$

   $\ddot{\theta} - k^2\theta = 0$ la solution de cette équation différentielle est de la forme

   $\theta(t) = C_1 e^{-kt} + C_2 e^{kt}, \text{avec } C_1 \text{et } C_2 \text{des constantes d'intgration}$

   $$et\ k = \sqrt{\frac{3g}{2l} - \frac{6k}{m}}$$

   Exercices similaires :

   Dans les figures ci-dessous, une tige masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O.

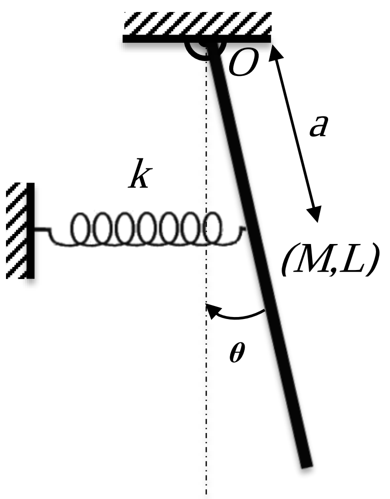


Figure 1 (a)

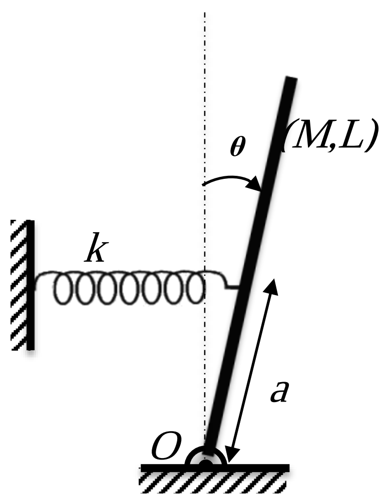


Figure 2(b)

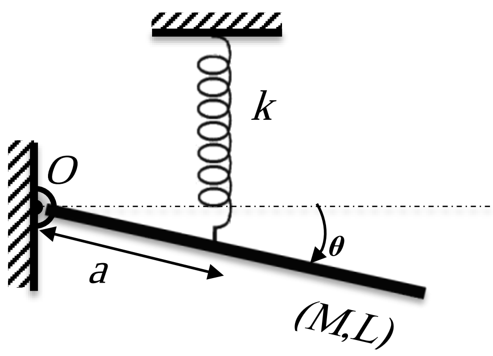


Figure 3(c)