Chapitre 1

Oscillations à un degré de liberté

Abdelaziz OUATIZERGA

Généralités

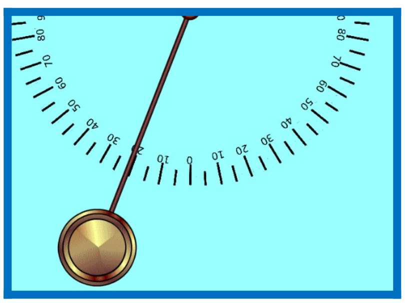
Les vibrations et ondes se retrouvent dans tous les domaines de la physique : circuits électriques oscillants, transfert de la chaleur, thermodynamique, électromagnétisme, le domaine optique…etc.
Les lois de la physique nous donnent les mêmes équations, mais opérant sur des quantités de natures différentes par exemple en mécanique l'amplitude de vibration mesurée en m, et en électricité : la charge mesurée en coulomb (ou potentiel exprimé en V) … etc.

Oscillation:

Un système oscillant est un système qui possède une propriété physique qui varie alternativement autour d'une valeur bien déterminée (valeur d'équilibre)

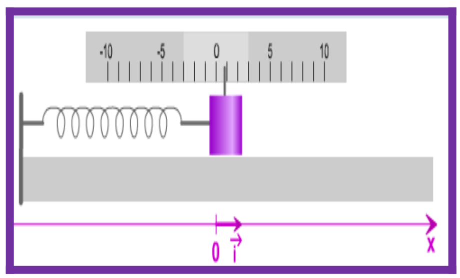
Exemples classiques

oscillation mécanique (système en rotation)



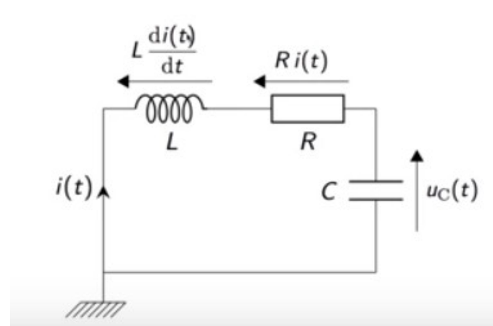
L'angle du pendule oscille autour de la valeur 0 (valeur d'équilibre)

oscillation mécanique (système en translation)



La position x de la masse attachée au ressort varie autour d'une valeur 0 (position d'équilibre)

oscillation électrique (système électrique)



Le condensateur chargé préalablement
La charge d'un circuit électrique varie autour de 0.

Mouvement périodique :

Un mouvement périodique dans le temps est un mouvement qui se répète à l'identique pendant des périodes égales. Exemple : pendule.

Un mouvement périodique dans l'espace est un mouvement qui se répète à l'identique dans des espaces égaux. Exemple : corde vibrante.

Période :

C'est le temps nécessaire à une oscillation périodique pour s'effectuer complètement. La période s'exprime donc en seconde (s).

Fréquence :

C'est le nombre d'oscillation dans une seconde, elle s'exprime en s^{-1} (Unité SI ; Hertz : 1Hz = 1 s^{-1})

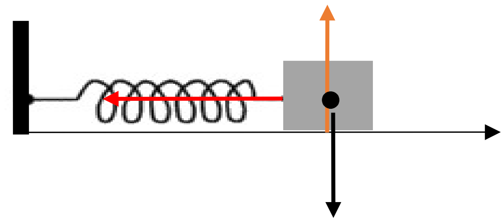
1 oscillation → s'effectue en ***T*** secondes

f oscillations → s'effectuent en 1 seconde

On en déduit $f = 1/T$

Exemples :

Système masse-ressort



Une masse attaché à l'extrémité libre d'un ressort fixé à un bâti ; effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre. Les frottements étant négligés la seule force agissant dans l'axe du mouvement est la force de rappel du ressort $F=-kx$ (Lois de Hooke)
K étant la constante de raideur du ressort.
X est la position de la masse m par rapport à la position d'équilibre et représente aussi la compression ou l'allongement du ressort par rapport à sa longueur naturelle

La relation fondamentale de la dynamique nous donne : $-kx=m\ddot{x}$

D'où l'équation de mouvement suivante

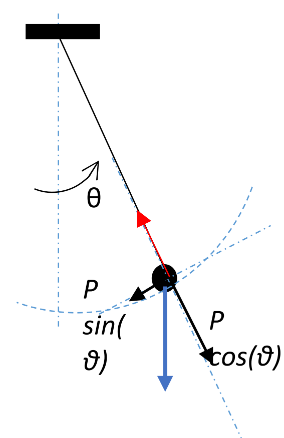
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

Le pendule

Une masse attachée à un fil de longueur l et de masse négligeable est soumise à la gravité. Ecarté de sa position d'équilibre ; elle effectue des oscillations autour de la position verticale.

L'équation d mouvement :

$$mg\sin(\theta)=m\left(l\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

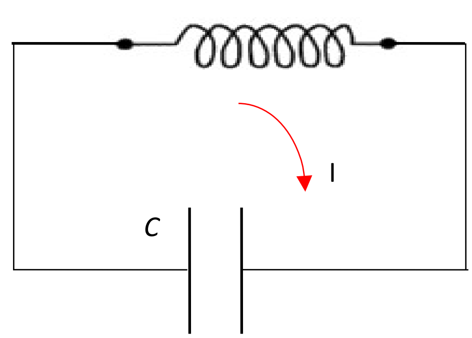


Si pour les petits angles on considère $sin\theta\approx\theta$; On obtient alors l'équation de mouvement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

Circuit électrique

Un condensateur chargé initialement se décharge dans la bobine lorsqu'on ferme le circuit. La charge du condensateur oscille périodiquement autour d'une de la valeur de l'équilibre statique (0 dans cet exemple)



La loi de la maille nous donne :

$$V_L+V_c=0$$

Sachant que

$$V_L = L\frac{dI}{dt}, V_c = \frac{q}{C} comme\ I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV_c}{dt}$$

On obtient l'équation de l'oscillation

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}V_c = 0$$

L'oscillation harmonique :

Nous avons vu avec les trois exemples précédents bien que parfois d'origine différent (mécanique ou électrique) aboutissent à la même forme d'équation. Nous remarquons aussi que le coefficient intervenant l'équation a les dimensions d'une fréquence à chaque fois.

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \left[\frac{g}{l}\right] = \left[\frac{1}{LC}\right] = \left[\frac{1}{T^2}\right]^{()}$$

On peut ainsi écrire l'équation sous forme générale.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

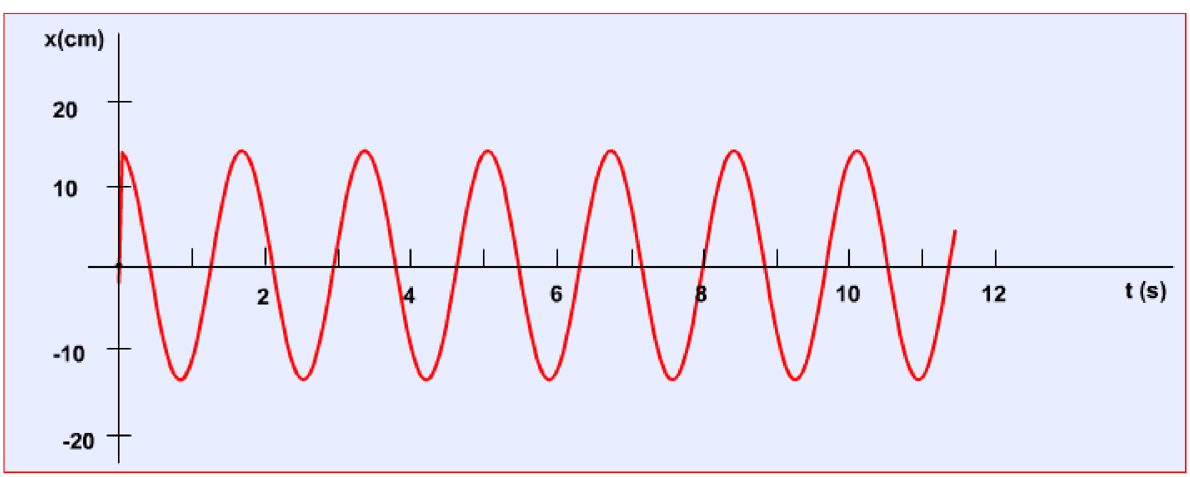
u étant une propriété physique sujet de l'oscillation (position, charge, tension, pression …etc.)
ω_0 est la pulsation propre du système. Elle est reliée à la fréquence par la relation $\omega = 2\pi f$. Son unité (radian/seconde)

Dans la suite, nous allons montrer que la solution de cette équation s'écit sous la forme :

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

A. **A** L'amplitude de l'oscillation qui possède l'unité de la propriété physique oscillatoire *u(t)*
B. ω La pulsation elle est reliée à la fréquence par $\omega = 2\pi f$. Son unité est donc radian/seconde
C. $\omega t + \phi$ La phase ou angle de phase
D. ϕ Déphasage ou la phase à t=0 il représente un décalage entre $A\sin(\omega t + \phi)$ et $A\sin(\omega t)$ sur l'axe de temps.
E. Les constantes et ϕ sont déterminées si on connait les conditions initiales (à t=0)

$$u(0)\,et\,\frac{du}{dt}(0)$$

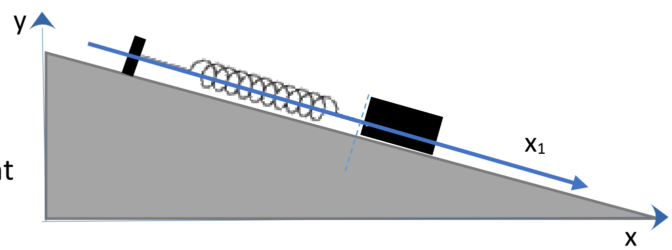


La mécanique de Lagrange

- Dans la physique classique, tous les problèmes de la mécanique sont traités dans le cadre de la théorie Newtonienne à l'aide la relation fondamentale de la dynamique.
- La mécanique de Lagrange n'est pas une nouvelle théorie ; c'est une méthode alternative pour résoudre les problèmes de la mécanique.
- La méthode de Lagrange consiste à utiliser des variables généralisées q (q=x, θ, …) et leurs vitesses généralisées $\dot{q}$ pour décrire une particule donnée, au lieu des trois variables classiques x, y, z.
- C'est la symétrie du problème qui suggère le choix de la variable à utiliser.
- N'importe quelle variable peut être utilisée à condition qu'elle suffise pour décrire le système.

<u>Exemple :</u>

La coordonnée généralisée appelé arbitrairement x_1 est différente de celle du repère cartésiens (x, y). Mais elle est très adaptée pour décrire le mouvement de la masse sur le plan incliné fig. ci-contre.



- Le degré de liberté d'un objet matériel est égal au nombre de coordonnées généralisées nécessaires et suffisantes pour décrire son mouvement (dans l'exemple =1; la coordonnée généralisée x_1 suffit).

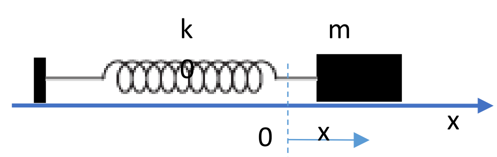
- **La méthode de Lagrange consiste en deux étapes :**
  1. Définir une fonction L = Ec - Ep appelée fonction de Lagrange ou le Lagrangien du système, en fonction de x et $\dot{x}$, $avec\ \dot{x}=\frac{dx}{dt}$ ou Ec est l'énergie cinétique et Ep l'énergie potentielle du système.
  2. Appliquer l'équation de Lagrange donné comme suit pour un système **<u>conservatif</u>**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, i=1,\ldots DDL$$

<u>Exemple:</u>

Soit le système masse-ressort de la figure.

On se propose de chercher son équation différentielle de mouvement.



$$E_c=\frac{1}{2}m\dot{x}^2, E_p=\frac{1}{2}kx^2, L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

DDL=1 , q=x ; l'équation de mouvement s'écrit alors : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{x})=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

Calcul de l'énergie cinétique :

Pour une masse ponctuelle, l'énergie cinétique est définie comme $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

Dans le cas plus général, un solide effectue un mouvement quelconque. Son mouvement est décomposé en un mouvement translation de son centre de masse et un mouvement de rotation autour d'un axe instantané (Δ).

Dans le cas ou cet axe passe par le centre de masse : $E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

Calcul de l'énergie potentielle:

- **Elastique:** Le travail fournit pour déformer un ressort sera emmagasiné sous forme d'énergie potentielle élastique.

Il est égal au travail de la force de rappel : $d\,E_e = -\,dW = kdx$ en intégrant $E_e = \int kxdx = \frac{1}{2} k x^2 + C$

Si considère Ee=0 lorsque x=0 alors $E_e = \frac{1}{2} k x^2$

X : est la déformation du ressort (allongement ou compression) = la longueur à un instant donné – longueur naturel

K : la constante de raideur du ressort, il traduit sa régidité par rapport à une déformation,

- **Gravitationnelle :**

Un objet matériel de masse m à une hauteur quelconque possède une énergie potentielle gravitationnelle.

De même, cette énergie est égale au travail lui est fourni par l'acquerir,

$$d\,E_g = -dW = Fdy$$

$$E_g = \int mgdy = mgy + C$$

Si on choisit Eg=0 sur le sol c-à-dire y=0 donc C=0 d'ou Eg=mgy. Le 0 est défini de manière arbitraire.

Y : est l'ordonnée de la masse m par rapport à l'origine choisie.

L'oscillateur libre à 1ddl – cas général

Un système oscillatoire libre est un système qui ne subit aucune force externe agissant sur son mouvement. L'oscillation est provoquée initialement, le système est, ensuite, laissé à lui-même pour osciller librement. Dans le cas général l'oscillateur peut subir un amortissement ; c'est-à-dire présence d'une force de frottement promotionnelle à la vitesse,

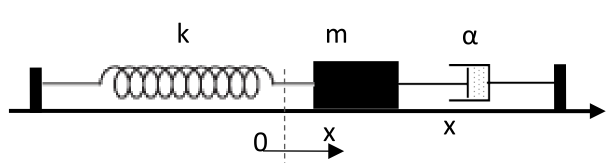
dans le formalisme de Lagrange cela se traduit par la cprésence d'un terme faisant intervenir la fonction de dissipation.

La fonction de dissipation est défini comme suit : D = P /2 ou P est la puissance de dissipation P=αv²

Équation de mouvement

Le système masse-ressort-amortisseur représente un cas simple et représentatif des systèmes 1 degré de liberté

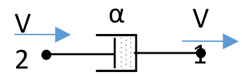
Avec la présence de l'amortisseur l'équation de Lagrange est de la forme suivante :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{-\partial D}{\partial \dot{x}}$$

D : est la fonction de dissipation. Elle est définie comme étant la moitiée de la puissance dissipée au cours du temps.

L'amortisseur est un appareil qui agit linéairement pour amortir (ralentir) l'oscillation.



En général l'amortisseur peut actionner dans les deux sens. Dans ce cas $D=\frac{1}{2}\alpha\left(v_1-v_2\right)^2$.

Dans notre exemple une extrémité est fixe donc $D=\frac{1}{2}\alpha\,\dot{x}^2$.

Précédemment nous avons déjà établi : $L=\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2-\frac{1}{2}k\,x^2$

On utilisant l'équation de Lagrange ci-dessus on trouve l'équation de mouvement suivante :

$$m\ddot{x}+\alpha\,\dot{x}+kx=0 \rightarrow \ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

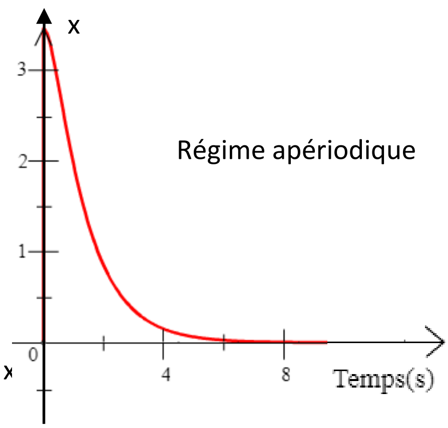
$$\ddot{x}+2\delta\,\dot{x}+\omega_0^2\,x=0\ldots\ldots(1)\,avec\;\delta=\frac{\alpha}{2m}\;et\;\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ou δ **est l**e facteur d'amortissement. Cette dernière est l'équation de mouvement générale d'un oscillateur libre à 1ddl.

En passant les détails mathématiques, la solution générale de cette équation dépend des solutions algébriques de l'équation caractéristique correspondante (on transforme l'ordre de dérivée en degré de puissance).

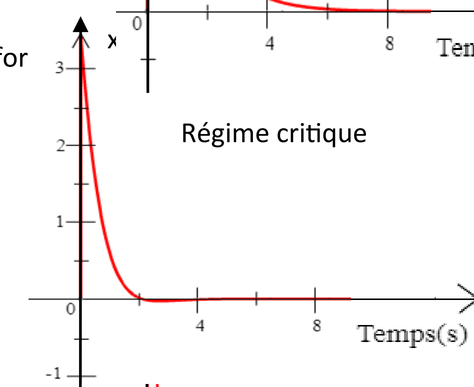
$$r^2+2\delta r+\omega_0^2=0$$

Comparer le discriminant $\Delta=4\left(\delta^2-\omega_0^2\right)$ par rapport à 0 revient à comparer δ $\grave{a}\,\omega_0$.



- $\delta>\omega_0$: Deux solutions réelles $r_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}<0$
  La solution est de la forme suivante : $x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$

  Cette situation est rencontrée lorsque l'amortissement est relativement for
  L'oecillateur revient doucement à son point d'équilibre
- $\delta=\omega_0$: une solution double $r_1=r_2=-\delta<0$
  La solution est de la forme suivante : $x(t)=\left(c_1+c_2t\right)e^{-\delta t}$



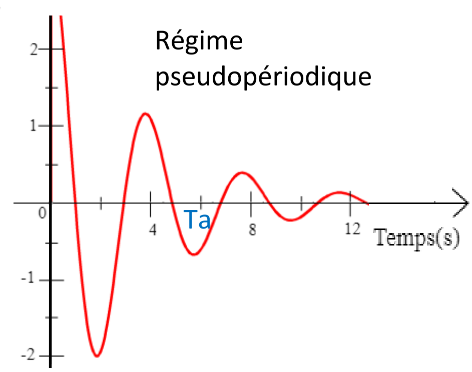
Cette situation est rencontrée lorsque l'amortissement égal à la pulsation propre

L'oscillateur revient le plus rapidement pssible son point d'équilibre.

- $\delta<\omega_0$: Deux solution complexes $r_{1,2}=-\delta\pm i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\;avec\;i^2=-1$

  La solution s'écrit sous la forme : $x(t)=A\,e^{-\delta t}\cos\left(\omega_a t+\phi\right)$

  $avec\;\omega_a=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ On remarque sur la pulsation d'mortissement est inférieure à la pulsation propre



Cette situation est rencontrée lorsque l'amortissement est faible. L'oscillateur revient doucement à son point d'équilibre tout en effectuant des oscillations.

Pour ce régime deux paramètres sont à définir :

- ### Décrément logarithmique D_c:

  Caractérise la décroissance du système oscillatoire amorti.

  On définit le décrément logarithmique **D** par :

$$D_c = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT_a)}$$

Où x(t) est l'amplitude à un instant donné t, et x(t+nTa) est l'amplitude après n période de cet instant.

On remplaçant par l'expression de x(t) dans l'expression de Dc, on démontre aisément la relation : $D_c = \delta T_a$

δ est le facteur d'amortissement, Ta est la pseudo période du système oscillatoire amorti.

- ### Facteur de qualité Q :

Lorsque la détermination de D_c est difficile, on définit un autre paramètre, le facteur de qualité Q, est utilisé à la place. Il est définit par :

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E}$$

E est l'énergie total initiale que possède le système. ΔE est l'énergie dissipée (perdue) par le système à chaque période.

On démontre théoriquement que l'expression de Q pour un faible amortissement s'écrit : $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{D}$

- Cas particulier $\delta = 0$ **(Absence d'amortissement): L'oscillateur harmonique**

  L'équation (1) devient :$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ on est dans le dernier cas $(comme\ \omega_0 > 0,\ donc\ forcément\ 0 < \omega_0)$

  La solution est donc $x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$remplaçons $\delta = 0$ on trouve $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

  C'est la solution correspondant à une oscillation harmonique simple (MHS)