Université USTHB – Fac. De Physique - GP-F-2eme année - Groupes 1 et 4 - Mai 2018 - A. OUATIZERGA

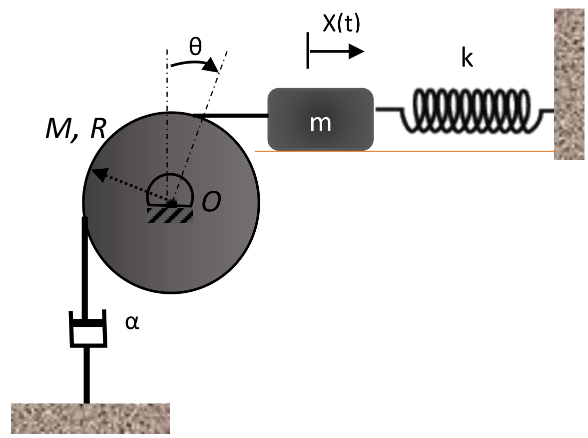
Contrôle continu N° 1

Exercice 1 : Système libre non amorti

14 pts

On considère un système composé d'une masse ***m*** se déplaçant horizontalement selon x relié par un ressort de raideur ***k*** à un disque en rotation par rapport à son axe fixe. Le Disque est relié à un amortisseur de constante α attaché à un bâti à l'autre extrémité.

Le disque peut pivoter dans le plan vertical autour du point O.



La masse ***m*** est écartée de son état d'équilibre de ***5cm*** puis relâchée sans vitesse initiale pour osciller librement. On constate que l'amplitude des oscillations du système perd 90% de sa valeur du départ au bout de 10 oscillations. On constate aussi que la période de ces oscillations décroissantes est constante et est égale à ***0.8s***.

1- Dire, quel est le régime d'oscillation du système. Sous quelle condition on obtient ce régime.
   Régime pseudopériodique.
   Ce régime est obtenu lorsque l'amortissement est faible ($\delta < \omega_0$)
2- Calculer la valeur du facteur d'amortissement ***δ***.

$$D_c = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{100\%}{100\% - 99\%}\right) = 0.23 = \delta T_a \rightarrow \delta = \frac{0.23}{0.8} = 0.287\ s^{-1}$$

   On veut déterminer la constante d'amortissement ***α*** à l'aide de l'expression du facteur d'amortissement ***δ***. Pour cela on doit chercher l'équation de mouvement
3- Trouver La fonction de Lagrange du système $L(x, \dot{x})$.

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad D_s = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

4- Etablir l'équation de mouvement du système et donner l'expression du facteur δ et de la pulsation propre ω_0

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2\alpha}{M + 2m}\dot{x} + \frac{2k}{M + 2m}x = 0$$

$$\delta = \frac{\alpha}{M + 2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M + 2m}}$$

5- Si ***m=0.25*** kg et ***M=2m***, calculer la constante d'amortissement ***α***.

$$M = 2m \rightarrow \delta = \frac{\alpha}{4m} \rightarrow \alpha = 4m\delta = 0.287\ kg.s^{-1}$$

6- Déduire de ce qui précède, la valeur de la pulsation propre ω_0 et de la constante de raideur **k** du ressort.

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 7.85 = \omega_0^2 - \delta^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \delta^2} = 7.86\ rad.s^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \rightarrow k = 2m\omega_0^2 = 30.86\ kg.m.s^{-2}$$

7- Ecrire l'expression de la réponse du système x(t)

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \phi)$$

Contrôle continu N° 1

$$x(0) = 5 \; et \; \dot{x}(0) = 0$$

$$\begin{cases} A\cos(\phi) = 5 & (1) \\ -\delta\cos\phi - \omega_a \sin\phi = 0 & (2) \end{cases}$$

$$de\ (2)\ \tan\phi = 0 \rightarrow \phi = 0 \quad de\ (1) \rightarrow A = 5$$

$$x(t) = 5e^{-0.23t}\cos(7.85t)$$

<u>Exercice 3 : Système forcé</u>

Soit le système sur la figure ci-contre. Le disque roule sans glissement. 6 pts

Le point P est assujetti à suivre un mouvement sinusoïdal $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$ parallèle à X.

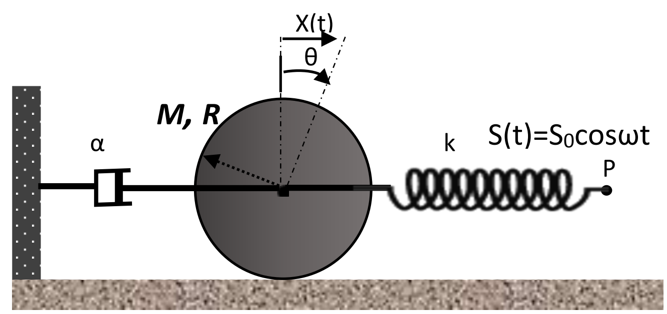
1- Ecrire l'équation du mouvement du disque.

$$L = \frac{3}{4}mx^2 - \frac{1}{2}k(x-s)^2 , \qquad D_s = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial D_s}{\partial \dot{x}}\right)$$

$$\frac{3}{2}mx + \alpha x + kx = ks \rightarrow \ddot{x} + \frac{2\alpha}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2k}{3m}s_0\cos\omega t$$

2- En régime permanent, donner l'expression de l'amplitude des vibrations ainsi la constante de déphasage en fonction de S_o, δ, ω_0 et ω.



$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0\cos\omega t$$

$$x(t) = B\cos(\omega t + \Phi) \;\; avec \;\; B = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$et\ \Phi = Arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$\delta = \frac{\alpha}{3m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \;, \quad A_0 = \frac{2k}{3m}s_0$$

3- Calculer ces deux constantes et écrire l'expression de la réponse du système $x(t)$

$$\delta = 20\ s^{-1} , \qquad \omega_0 = 10\ rad.s^{-1} , \qquad A_0 = 10\ m.s^{-1}$$

$$B = 25cm , \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 0.25\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad en\ mètres$$

On donne S_0 = 10cm, ω=10 rad/s, M=1kg, α=60 kg/s
K=150 kg.m.s^{-2}

بالتـوفـيــــــق للجميـع