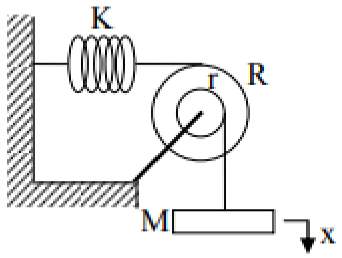
USTHB
Faculté de Physique
2éme Année ST GTR

2018/2019
Vibrations et Ondes Mécaniques
Durée : 1h

Interrogation

Exercice 1 (Système libre à un degré de liberté)



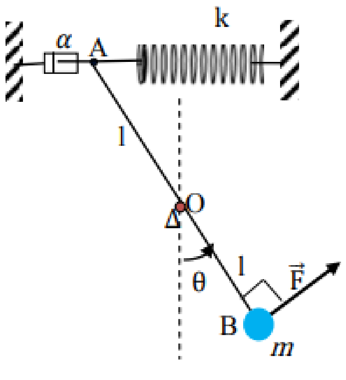
On considère le système mécanique de la figure ci-contre constitué d'un ressort de raideur K accroché à un fil inextensible qui s'enroule autour d'une poulie de rayon extérieur R et de masse négligeable. Une masse M est reliée à la partie centrale de la poulie de rayon r.L'ensemble oscille dans le plan vertical.

1)-Montrez que l'énergie potentielle s'écrit sous la forme
$U = \frac{1}{2}K(Cx)^2$
où C est une constante à determiner

2)- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3)-Résoudre l'équation du mouvement. On donne les conditions initiales suivantes :
$x(t = 0) = x_0$
$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$

Exercice 2 (Système forcé à un degré de liberté)



Une tige AB, de longueur , rigide et de masse négligeable, peut tourner, dans le plan vertical autour d'un axe fixe passant par son milieu O. L'extrémité A de la tige est reliée à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k . A l'extrémité B de la tige est fixée une masse ponctuelle . Les frottements sont modélisés par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. La position de la masse est repérée par l'angle $\theta_0(t)$ par rapport à sa position d'équilibre (voir figure). On applique, à la masse une force excitatrice contenue dans le plan vertical, perpendiculaire à la tige AB et d'intensité $F = F_0 cos(\Omega t)$. On s'intéressera aux oscillations de faibles amplitudes par rapport à la position d'équilibre. On notera ,g l'accélération de la pesanteur.

1)-Calculer l'énergie potentielle du système.

2)-Ecrire le lagrangien du système.

3)-Etablir l'équation du mouvement de la masse m. l'écrire dans le cas où
$\frac{k}{m} = \frac{g}{l} = \omega_0^2$.

4)- Calculer l'expression de l'amplitude θ_0 de la solution particulière dans le cas où $\alpha = 0$.

Solution

Exercice 1: (3 points)

1) (1 point)
$U = \frac{1}{2}K(R\theta)^2$ or $x = r\theta$ remplaçons θ par $= x/r$ on a $U = \frac{1}{2}K(\frac{R}{r}x)^2$ donc $C = \frac{R}{r}$.
2) (1 point)
$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(R/r)^2x^2$
C'est un système libre non amorti. En utilisant l'équation de Lagrane pour la variable généralisée x on établi l'équation de mouvement:

$$m\ddot{x} + k(\frac{R}{r})^2x = 0$$

L'équation normalisée devient : $\ddot{x} + \frac{k}{m}(\frac{R}{r})^2x = 0$
C 'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\frac{R}{r})^2}$
3) (1 points)
la solution s'écrit comme suit: $x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$ Les cpnditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$
donne les constantes suivantes: $A = \sqrt{\frac{x_0\omega_0^2 + \dot{x_0}^2}{\omega_0^2}}$ et $\phi = Arctan(\frac{-\dot{x_0}}{x_0\omega_0})$

Exercice 2: (4.5 points)
1) (1 points)
Energie potentielle: $U = \frac{mgl}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}k(l\theta)^2$
2)(0.5 points)
$L = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 - (\frac{1}{2}(mgl + kl^2)\theta^2$
3) (2 points)
$D = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$
L'équation de mouvement: $ml^2\ddot{\theta} + (mgl + kl^2)\theta = -\alpha l^2\dot{\theta} + Fl$
La forme normalisée : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + (\frac{g}{l} + \frac{k}{m})\theta = F_0lcos(\Omega t)$
si $\frac{g}{l} = \frac{k}{m} = \omega_0^2$ alors l'équation devient
$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + 2\omega_0^2\theta = \frac{F_0}{ml}cos(\Omega t)$
4) (1 point)
La solution particulière est $\theta(t) = \theta_0 cos(\Omega t + \Phi)$ avec θ_0 a pour expression
$\theta_0 = \frac{F_0/ml}{\sqrt{(4\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}}$ ou $\delta = \frac{\alpha}{2m}$
si $\alpha = 0$ donc $\delta = 0$, θ_0 devient
$\theta_0 = \frac{F_0}{ml(4\omega_0^2 - \Omega^2)}$