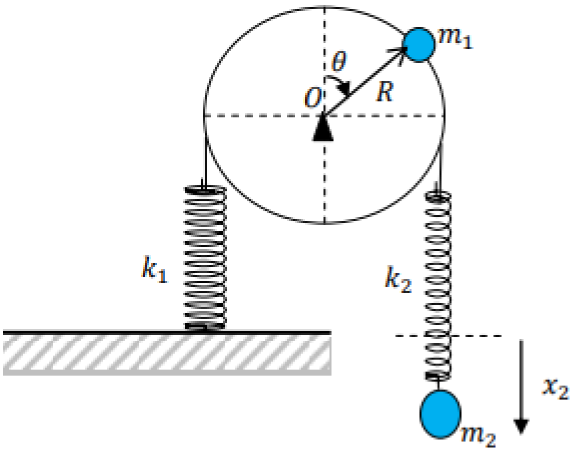
USTHB
Faculté de Physique
2éme Année ST GTR

2018/2019
Vibrations et Ondes Mécaniques
Durée : 1h

Interrogation N^o 2
Sujet B

Exercice (Système libre à deux degrés de liberté)



Un disque de masse négligeable et de rayon R peut tourner dans le plan vertical autour d'un axe fixe, perpendiculaire à ce plan et passant par son centre O. Une masse ponctuelle m_1 est soudée au disque sur sa circonférence. Le disque est relié à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et à une masse ponctuelle m_2 par l'intermédiaire d'un ressort de constante k_2 comme indiqué sur la figure. On écarte légèrement le système de sa position d'équilibre. On désigne par $x_1(t) = R\theta(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements respectifs de m_2 et de m_2 par rapport à leur position d'équilibre. A l'équilibre $x_1 = x_2 = 0$ On note l'accélération de la pesanteur

a)- Déterminer l'énergie potentielle U du système. En utilisant les conditions d'équilibre pour la masse m_1 et la masse m_2 , montrer que U est de la forme $U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - \frac{m_1 g}{R})x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2$

b)- Déterminer le Lagrangien L du système.

c)- En déduire les équations du mouvement de m_1 et de m_2 On prendra $m_1 = 4m_2 = 4m$ et $k_1 = 4k_2 = 4k$ et les écrire dans le cas où $\frac{g}{R} = \frac{k}{m}$ et on posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

d)- Calculer les pulsations propres du système en fonction de ω_0

e)- Calculer les rapports d'amplitude dans chaque mode. En déduire les expressions des solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$

f)- On applique une force $F = F_0 cos(\omega t)$ sur la masse m_2 dans le sens de sa vibration. Réécrire, dans ce cas, les équations de mouvement en fonction de ω_0.

g)- Trouver les expressions des solutions $x_1 et x_2$.

Solution - sujet B

a)- L'énergie potentielle: (1)
Un pendule inversé + une masse-ressort suspendu $U = -\frac{1}{2}m_1 gR\theta^2 + \frac{1}{2}k_1(R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - R\theta)^2$
avec $x_1 = R\theta$ et après developpement on trouve

$U = -\frac{1}{2}m_1 x_1^2/R + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 - k_2 x_1 x_2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - m_1 g/R)x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 - k_2 x_1 x_2$

b)- Le Lagrangien: (1)
Le Lagrangien devient après les substitutions: $m_1 = 4m_2 = 4m$ et $k_1 = 4k_2 = 4k$ et $\frac{g}{R} = \frac{k}{m}$

$L = 4m\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_2}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$

c)- Les équations de mouvement: (1)
Les pulsations propres se calculent pour un système libre non amorti. Les équations de mouvement s'écrivent dans ce cas:

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 & 4x_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 & x_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

d)- Les pulsations propres: (1.5)
on proposons des solutions sinusoidales ndu type: $x_1 = Acos(\omega t + \phi) \qquad x_2 = Bcos(\omega t + \phi)$

On aboutit au système:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - 4\omega^2)A - \omega_0^2 B = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)B - \omega_0^2 A = 0 \end{cases}$$

L'équation aux valeurs propres: $(\omega_0^2 - 4\omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = \omega^2(4\omega^2 - 5\omega_0^2) = 0$ qui a pour solutions $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}\omega_0$

e)- Les rapports d'amplitude: (1)
La solution générale sécrit de la façon suivante:
$x_1 = A_1cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad x_2 = B_1cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2cos(\omega_2 t + \phi_2)$

Pour le premier mode: $x_1 = A_1cos(\omega_1 t + \phi) \qquad x_2 = B_1cos(\omega_1 t + \phi)$
Le système obtenu

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - 4\omega_1^2)A_1 - \omega_0^2 B_1 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega_1^2)B_1 - \omega_0^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

de la première équation on obtient $\mu_1 = B_1/A_1 = \frac{(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)}{\omega_0^2} = 1 - (\frac{\omega_1}{\omega_0})^2 = 1 \qquad$ car $\omega_1 = 0$
de même pour le deuxième mode on obtient $\mu_2 = B_2/A_2 = 1 - (\frac{\omega_2}{\omega_0})^2 = 1 - 4 \times 5/4 = -4$

d'ou la solution générale devient :
$x_1 = A_1cos(\phi_1) + A_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad x_2 = A_1cos(\phi_1) - 4A_2cos(\omega_2 t + \phi_2)$

f)- Les équations de mouvement opur le régime forcé: (1)
La force s'exerce sur la masse m_2 qui effectue une translation donc:

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 & 4x_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = F & x_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = F/m \end{cases}$$

g)- Les solutions x_1 et x_2: (1)
la solution du régime permanent du système focé est de la forme : $x_1 = Acos(\omega t + \phi_1) = Ae^{i(\omega t + \phi_1)}$ et $x_2 = Bcos(\omega t + \phi_2) = Be^{i(\omega t + \phi_2)}$ ou ω est la pulsation d'excitation de la force. si on remplace dans les équations de mouvement on trouve:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - 4\omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ -\omega_0^2 x_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)x_2 = F/m \end{cases}$$

On utilisant la méthode eds déterminant de Kramer: $x_1 = \omega_0^2 F/m\omega^2(4\omega^2 - 5\omega_0^2)$
$x_2 = (\omega_0^2 - 4\omega^2)F/(m\omega^2(4\omega^2 - 5\omega_0^2))$