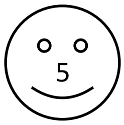
Contrôle continu N° 2 – durée 1h30

Questions de cours sur les ondes :



1. Par quel facteur faudrait-il accroitre la tension appliquée à une corde pour doubler la vitesse de propagation ?

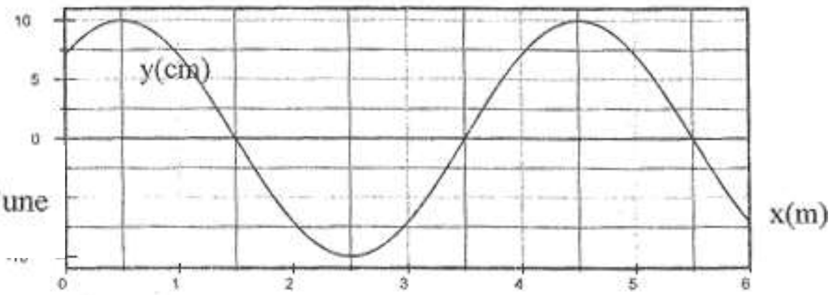
   $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ 0.5 donc $2V = \sqrt{\frac{4F}{\mu}}$ *il s'ensuit que* pour doubler la vitesse ; la tension doit être multipliée par 4. 0.5

2. Quelle est la différence entre les ondes transversales et les ondes longitudinales

   Pour l'onde transversale la matière vibre perpendiculairement à la direction de propagation, alors que pour l'onde longitudinale elle vibre dans le même sens. 1

3. Une onde transversale sinusoïdale, se propage le long d'une corde dans le sens des x négatifs à la vitesse V = 10m/s. La figure ci-dessous illustre le déplacement des particules sur la corde en fonction de la position à un instant t.

Calculer :
a) l'amplitude de cette onde,
b) sa longueur d'onde,
c) sa période,
d) la vitesse maximale d'une particule sur la corde.



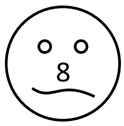
a) A=10 cm 0.5
b) λ=4m 0.5
c) $\lambda = VT \rightarrow T = \frac{\lambda}{V} = 0.4\ s$ 1
d) Onde harmonique sinusoïdale donc $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$
Une particule sur la corde a une coordonnée x déterminée.sa vitesse est donc verticale, d'où

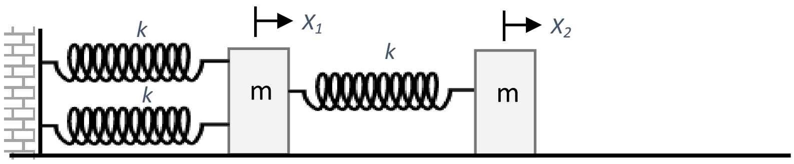
$$y_{particule}(t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

$$\dot{y}_{partricule}(t) = \omega A\cos(kx - \omega t + \phi_2), \qquad \dot{y}_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = 157\ cm/s$$ 1

Exercice 2 système libre non amorti à 2 DDL

Deux masses identiques sont reliées comme sur la figure ci-après par des ressorts identiques sans masses de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.
Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre statique des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.





1. En utilisant le formalisme de Lagrange établir les équations différentielles de mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux masses.

   Les deux ressorts parallèles sont équivalent à un ressort de raideur 2k.

   $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$ 1

   Les deux équations de Lagrange associé à ce système 2DDL non amorti sont

Contrôle continu N° 2 – durée 1h30

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

On obtient les équations de mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$ 2

2. Trouver les deux pulsations propres $\omega_1 et\ \omega_2$ du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

En divisant les équations de mouvement par m on a :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

On cherche des solutions sinusoidales du type

$$\begin{cases} x_1 = Acos(\omega t + \phi) \\ x_2 = Bcos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

On remplaçant dans le système on obtient

$$\begin{cases} (3\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\, x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système aura une solution non triviale si le déterminant est nul. On obtient l'équation aux valeurs propres suivante :

$$(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0$$
$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

Les deux solutions admises sont :

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\omega_0 = 0.76\omega_0 \qquad et \quad \omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\omega_0 = 1.84\omega_0$$ 2

3. Déterminer les rapports d'amplitudes et en déduire les expressions générales de $x_1(t)\ et\ x_2(t)$.

Les deux solutions s'écrivent maintenant comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = A_1cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = B_1cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

On utilisnt une équation du stème précédent nous avons

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{B}{A} = 3 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

D'où pour $\omega = \omega_1$ $\quad \frac{B_1}{A_1} = 3 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \sqrt{2} = 2.42$ 2

D'où pour $\omega = \omega_2$ $\quad \frac{B_1}{A_1} = 3 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \sqrt{2} = -0.41$

4. On suppose que $x_1(0)$=1cm, $x_2(0)$=−1cm, $\dot{x}_1(0)=0\ et\ \dot{x}_2(0)=0$, trouver les expressions de $x_1(t)\ et\ x_2(t)$.

Par suite les solutions s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = A_1cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad + \quad A_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = 2.42A_1cos(\omega_1 t + \phi_1) - 0.38A_2cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

En appliquant les conditions initiales on obtient les équations suivantes :

Contrôle continu N° 2 – durée 1h30

$$\begin{cases} A_1cos(\phi_1) \;+\; A_2cos(\phi_2) = 1 & (1)\\ (1+\sqrt{2})A_1cos(\phi_1) + (1-\sqrt{2})A_2cos(\phi_2) \;= -1 & (2)\\ \omega_1 A_1sin(\phi_1) \;+\; \omega_2\, A_2sin(\phi_2) = 0 & (3)\\ (1+\sqrt{2})A_1sin(\phi_1) + (1-\sqrt{2})A_2sin(\phi_2) \;= 0 & (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})*(1)-(2): \quad -2\sqrt{2}A_1cos(\phi_1) \;= 2-\sqrt{2} & (5)\\ (1+\sqrt{2})*(1)-(2): \quad 2\sqrt{2}A_2cos(\phi_2) \;= 2+\sqrt{2} & (6)\\ (1-\sqrt{2})*(3)-(4): \; -2\sqrt{2}\omega_1 A_1sin(\phi_1) = 0 & (7)\\ (1+\sqrt{2})*(3)-(4): \quad 2\sqrt{2}A_2sin(\phi_2) \;= 0 & (8)\end{cases}$$

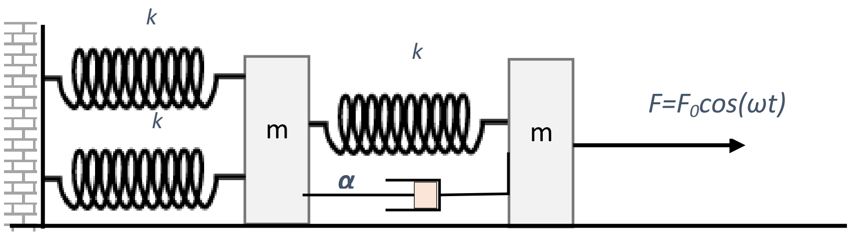
$$\frac{(7)}{(5)}: \;\tan(\phi_1)=0 \;\rightarrow\; \phi_1 = 0 \;\; de\;(5)\;\; A_1 = -\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) = -0.21$$

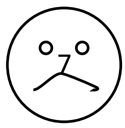
$$\frac{(8)}{(6)}: \;\tan(\phi_2)=0 \;\rightarrow\; \phi_2 = 0 \;\; de\;(6)\;\; A_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) = \;1.21$$

$$\begin{cases} x_1 == -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)cos(\omega_1 t) \;\; +\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)cos(\omega_2 t) \\ x_2 = -0.5cos(\omega_1 t) - 0.5cos(\omega_2 t)\end{cases}$$ 2

Exercice 3 : Système forcé à 2DDL :

On considère le système de l'exercice précédent et on le modifie de la façon suivante : une force est appliquée à la deuxième masse afin de vaincre l'amortissement de couplage.





1) Etablir les équations de mouvement dans ce cas.
   Nous avons besoin de la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 - \alpha\dot{x}_1\dot{x}_2$$ 0.5

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + 3kx_1 - \alpha\dot{x}_2 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 - \alpha\dot{x}_1 - kx_1 = F_0\cos(\omega t)\end{cases}$$ 1 1 *en utilisant* ω_0

$$\ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \frac{\alpha}{m}\dot{x}_2 - \omega_0^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 - \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{m}co$$

2) En déduire les équations aux vitesses.
   Les solutions permanentes sont de la même forme que la force.

$$\begin{cases} x_1 = Acos(\omega t+\phi) \\ x_2 = Bcos(\omega t+\phi)\end{cases}$$ ici on utilise la notation cpmplexe $x_1 = Ae^{i(\omega t+\phi_1)} = \bar{A}e^{i\omega t}$ $x_2 = Be^{i(\omega t+\phi_2)} = \bar{B}e^{i\omega t}$

$$\dot{x}_1 = i\omega x_1 \rightarrow x_1 = \frac{\dot{x}_1}{i\omega} \quad et\; \ddot{x}_1 = i\omega\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_2 = i\omega x_2 \rightarrow x_2 = \frac{\dot{x}_2}{i\omega} \quad et\; \ddot{x}_2 = i\omega\dot{x}_2$$ 0.5

Ici ω est une donnée du problème (la pulsation de la force). Et les amplitudes A et B dépendent de ω. On divise par m et on utilise l'expression de ω_0.

Contrôle continu N° 2 – durée 1h30

$$\begin{cases} i\omega\dot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + \dfrac{3\omega_0^2}{i\omega}\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 - \dfrac{\omega_0^2}{i\omega}\dot{x}_2 = 0 \\ i\omega\dot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + \dfrac{\omega_0^2}{i\omega}\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 - \dfrac{\omega_0^2}{i\omega}\dot{x}_1 = F_0 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} (3\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)\dot{x}_1 - (i\omega\alpha + \omega_0^2)\dot{x}_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)\dot{x}_2 - (i\omega\alpha + \omega_0^2)\dot{x}_1 = F_0 e^{i\omega t} \end{matrix}$$

1

1

3) Déterminer les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour la pulsation d'excitation $\omega = \sqrt{3}\,\omega_0$

$$\omega = \sqrt{3}\,\omega_0$$

Alors les deux équations deviennent

$$\begin{cases} i\omega\alpha\dot{x}_1 - (i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)\dot{x}_2 = 0 \\ -(i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)\dot{x}_1 + (-2\omega_0^2 + i\sqrt{3}\omega_0\alpha)\dot{x}_2 = F = F_0 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) \\ F & (-2\omega_0^2+i\sqrt{3}\omega_0\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\omega\alpha & -(i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) \\ (i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) & (-2\omega_0^2+i\sqrt{3}\omega_0\alpha) \end{vmatrix}}$$

0.5

$$= \frac{(i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)F_0 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}}{i\omega\alpha(-2\omega_0^2 + i\sqrt{3}\omega_0\alpha) + (i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)(i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)}$$

On intègre $x_1 = \frac{\dot{x}_1}{i\omega} = \frac{\dot{x}_1}{i\sqrt{3}\omega_0}$

$$\dot{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} i\omega\alpha & 0 \\ (i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\omega\alpha & -(i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) \\ -(i\sqrt{3}\omega_0\alpha+\omega_0^2) & (-2\omega_0^2+i\sqrt{3}\omega_0\alpha) \end{vmatrix}}$$

0.5

$$= \frac{i\omega\alpha F_0 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}}{i\omega\alpha(-2\omega_0^2 + i\sqrt{3}\omega_0\alpha) + (i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)(i\sqrt{3}\omega_0\alpha + \omega_0^2)}$$

On intègre $x_2 = \frac{\dot{x}_2}{i\omega} = \frac{\dot{x}_2}{i\sqrt{3}\omega_0}$

Ce sont les solutions en notations complexes.

4) Donner le circuit électrique équivalent.

1