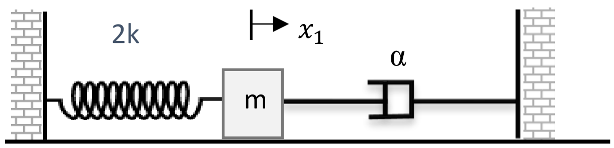
Contrôle continue (durée : 1h00)

Exercice 1 : Oscillateur à 1DDL (11 pts.)

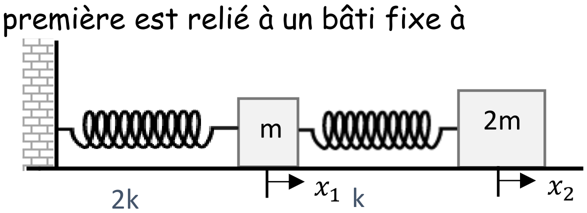
Un système composé d'une masse m=100 g attaché à une ressort de raideur 2k et un amortisseur de constante d'amortissement α est soumis aux conditions initiales suivantes : $x(0) = 0 \ \ et \ \ \dot{x}(0) = 1\ cm.s^{-1}$ pour évoluer librement ensuite.



1. Déterminer l'équation du mouvement et donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur d'amortissement δ.
2. Le système est dans le régime critique ou le retour à l'équilibre est le plus rapide.
   a) Quelle est la relation entre $\omega_0 \ et \ \delta$ et donner l'expression de la solution $x(t)$ dans ce cas.
   b) A l'aide des conditions initiales déterminer l'expression exacte de $x(t)$
   c) Déterminer l'expression de t_m ; l'instant pour laquelle le déplacement $x(t)$ est maximal en fonction de δ.
   d) Trouver l'expression de la distance maximale de $x(t)$ qu'on appellera x_m en fonction de δ.
   e) La distance maximale x_m a été estimée à 2 cm. Calculer δ et en déduire la valeur de α.
   f) Calculer la valeur de ω_0 puis la valeur k.
3. On applique une force sinusoïdale $F = F_0 \cos \omega t$ qui agira horizontalement sur la masse m.
   a) Réécrire l'équation de mouvement dans ce cas.
   b) Donner l'expression de la solution en régime permanent et donner, sans calculer, les expressions des différents paramètres.

Exercice 2 : Oscillations libres 2DDL (9 pts)

Deux masses m et 2m sont reliées par un ressort de raideur k. La première est relié à un bâti fixe à l'aide d'un ressort de raideur 2k et l'autre par un ressort de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.



Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2. Trouver les deux pulsations propres $\omega_1 \ et \ \omega_2$ du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et donner les expressions générales des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

SOLUTION

Exercice 1 :

1. L'équation de mouvement
   - La fonction de Lagrange s'écrit alors : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2$ $\mathbf{(1)}$
   - La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$ $\mathbf{(0.5)}$
   - Equation de mouvement : $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 2kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$ $\mathbf{(1)}$
   - Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ $\quad Facteur\ d'amortissement:\ \delta = \frac{\alpha}{2m}$ $\mathbf{(0.25 + 0.25)}$

2. Détermination de $\boldsymbol{\alpha}$ **et de** $\boldsymbol{k}$

   a) Régime critique obtenu lorsque $\delta = \omega_0\ \ dans\ ce\ cas\ x(t) = (at + b)e^{-\delta t}$ **(0.5 + 0.5)**

   b) $x(0) = 0 \rightarrow b = 0\ \ et\ \dot{x}(0) = 1 \rightarrow\ \ a = 1\ \ \ donc\ \ x(t) = te^{-\delta t}$ **(1)**

   c) La distance maximale est obtenue lorsque $\dot{x}(t) = 0 \rightarrow t = \frac{1}{\delta}$ **(1)**

   d) $x_m = x(t_m) = \frac{1}{\delta e}$ **(1)**

   e) $x_m = 2 \rightarrow \frac{1}{\delta e} = 2 \rightarrow\ \ \delta = \frac{1}{2e}$ comme $\delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{1}{2e} \rightarrow \alpha = \frac{m}{e}$ **(0.5 + 0.5)**

   f) Or $\delta = \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2e} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \rightarrow k = \frac{m}{8e^2}$ **(1)**

3. L'équation de mouvement : on peut reprendre l'équation de mouvement précédente

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 2kx = F_0\cos\omega t \rightarrow\ \ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \mathbf{(2)}$$

4. En régime permanent : **(1)**

$$x(t) = X\sin(\omega t + \Phi)$$

$$\text{avec}\ \ \Theta = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\omega^2}} \quad \text{et}\ \ \Phi = \text{atan}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Exercice2 :

1. Les équations de mouvement :
   - Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}(2k)x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 = \frac{3}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 - kx_1x_2$ $\mathbf{(1)}$
   - Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2$ $\mathbf{(1)}$
   - La fonction de Lagrange s'écrit alors : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 - \frac{3}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{(1 + 1)}$$

2. On cherche des solutions du type sinusoïdal :

$$\begin{cases} x_1 = Acos(\omega t + \phi_1) \rightarrow\ \ x_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2 = Bcos(\omega t + \phi_2) \rightarrow x_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases} \quad \mathbf{(0.5)}$$

Les équations de mouvement deviennent : **(0.5 + 0.5)**

On divise les équations par m : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{cases}(3k - m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0 \\ (k - 2m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(3\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - 2\omega^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0\end{cases} \equiv \begin{cases}(3\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ -\omega_0^2 x_1 + (\omega_0^2 - 2\omega^2)x_2 = 0\end{cases} \quad (I)$$

- Les pulsations propres : Ce système homogène qui n'a de solutions non nulles que si le déterminant est nul.

$$(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - 2\omega^2) - (-\omega_0^2)(-\omega_0^2) = 0$$
$$2\omega^4 - 7\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0 \rightarrow \Omega = \omega^2 \rightarrow 2\Omega^2 - 7\omega_0^2\Omega + 2\omega_0^4 = 0 \quad (\mathbf{0.5})$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{33}}}{2} = 0.56\omega_0 \quad et \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{33}}}{2} = 1.78\omega_0 \quad (0.5 + 0.5)$$

- Les solutions générales s'écrivent donc grâce au principe de superposition comme suit :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (\mathbf{0.5})$$
$$x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (\mathbf{0.5})$$