

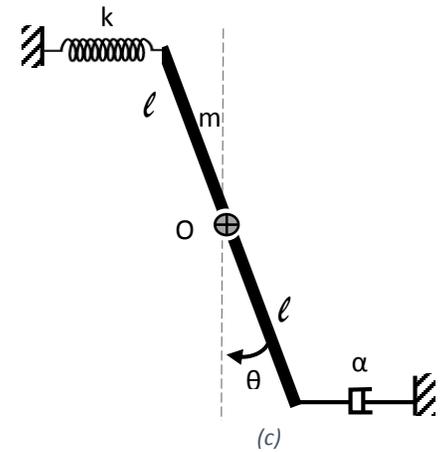
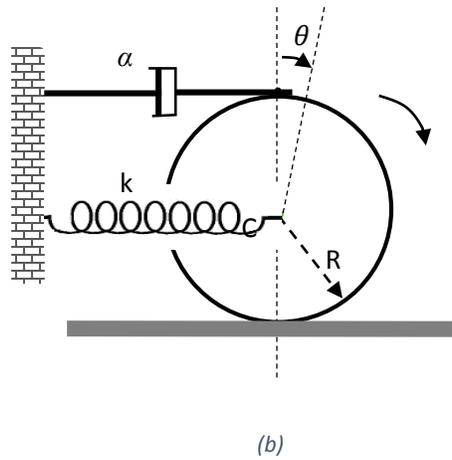
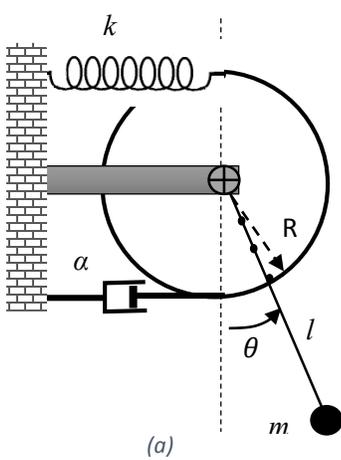
Contrôle continu (durée : 1h00)

Exercice 1 : Système libre 1ddl amorti (7.5)

Un oscillateur 1ddl libre amorti possède les quantités physiques suivantes.

$$E_c = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad E_p = \frac{1}{2} b q^2, \quad D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$$

1. Déterminer l'équation de mouvement en fonction de la variable généralisée q .
2. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ en fonction de a , b et c .
3. Choisir un des trois systèmes suivants et déterminer les expressions de a , b et c .



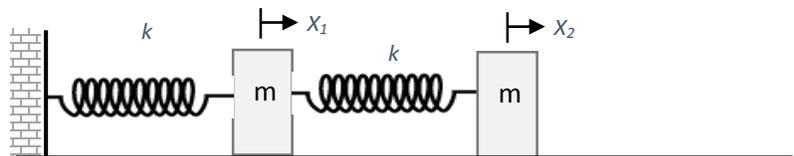
4. En déduire les expressions de ω_0 et δ pour l'oscillateur choisi.
5. L'amplitude des oscillations observées lorsque l'oscillateur évolue librement diminue de 20% pendant une période. Si la pseudo-période mesurée est $T_a = 1s$ en déduire les valeurs de ω_0 et δ .

Exercice 2 : Système libre non amorti à 2 DDL (7.5)

Deux masses identiques sont reliées comme sur la figure ci-après par des ressorts identiques sans masses de raideur k . L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.

Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1. En utilisant le formalisme de Lagrange établir les équations différentielles de mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux masses.



2. Trouver les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Déterminer les rapports d'amplitudes et en déduire les expressions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
(4 : Question bonus)
4. On suppose que $x_1(0)=1cm$, $x_2(0)=-1cm$, $\dot{x}_1(0)=0$ et $\dot{x}_2(0)=0$, trouver les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

SOLUTION

Exercice 1 :

1. C'est un oscillateur amorti à 1 DDL donc : (1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \right) \text{ avec } L = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b q^2 \text{ et } , D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$$

$$a \ddot{q} + c \dot{q} + b q = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{c}{a} \dot{q} + \frac{b}{a} q = 0$$

2. C'est l'équation d'un système amorti de la forme : $\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec : (0.5 + 0.5)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ et } \delta = \frac{c}{2a}$$

3. Système (a) : (1 + 1 + 1)

système	a	b	c
(a)	$m(R^2 + l^2)$	$kR^2 + mgl$	αR^2
(b)	$\frac{3}{2} mR^2$	kR^2	$4\alpha R^2$
(c)	$\frac{ml^2}{3}$	kl^2	αl^2

4. $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ et $\delta = \frac{c}{2a}$ (0.75 + 0.75)

système	ω_0	δ
(a)	$\sqrt{\frac{kR^2 + mgl}{m(R^2 + l^2)}}$	$\frac{\alpha R^2}{2m(R^2 + l^2)}$
(b)	$\sqrt{\frac{2k}{3m}}$	$\frac{4\alpha}{3m}$
(c)	$\sqrt{\frac{3k}{m}}$	$\frac{3\alpha}{2m}$

5. (0.5 + 0.5) $D = \ln \left(\frac{100\%}{100\% - 20\%} \right) = 0.22 = \delta T_a \rightarrow \delta = \frac{D}{T_a} = 0.22 \text{ s}^{-1}$ or $\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a} \right)^2 + \delta^2} = 6.28 \text{ rad.s}^{-1}$

Exercice2 :

1. $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$ (0.5 + 0.5 + 0.5)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

2. On cherche des solutions du type sinusoïdal : $\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega t + \phi_1) \rightarrow x_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2 = B \cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow x_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$ (0.5)

Les équations de mvt deviennent : (0.5 + 0.5 + 0.5)

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0 \\ (k - m\omega^2)x_1 - kx_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2\omega_0^2 - m\omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - m\omega^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ -\omega_0^2 x_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

C'est un système homogène qui n'a de solutions non nul que si le déterminant est nul. (0.5)

$$\begin{aligned} (2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - (-\omega_0^2)(-\omega_0^2) &= 0 \\ \omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 &= 0 \rightarrow \Omega = \omega^2 \rightarrow \Omega^2 - 3\omega_0^2\Omega + \omega_0^4 = 0 \end{aligned}$$

Qui a pour solution $\Omega_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})\omega_0^2$ d'ou $\omega_{1,2} = \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})}\omega_0 \rightarrow \omega_1 = 0.76\omega_0$ et $\omega_2 = 5.24\omega_0$ (0.5 + 0.5)

Donc $\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ est une solution $\cos(\omega_2 t + \phi_1)$ est une solution

3. Les solutions générales s'écrivent donc grâce au principe de superposition comme suit : (0.5)

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Les 6 constantes $A_1, A_2, B_1, B_2, \phi_1$ et ϕ_2 peuvent être réduites à 4 grâce aux rapports d'amplitudes.

Du système (I) on déduit

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(2\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2} = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

❖ Lorsque $\omega = \omega_1 \rightarrow 1er$ solution $\rightarrow \begin{matrix} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{matrix}$ (0.5)

$$\text{Dans ce cas } \mu_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{B_1}{A_1} = 2 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = 2 - (3 - \sqrt{5}) = (-1 + \sqrt{5}) = 1.24$$

❖ Lorsque $\omega = \omega_2 \rightarrow 2e$ solution $\rightarrow \begin{matrix} x_1 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{matrix}$ (0.5)

$$\text{Dans ce cas } \mu_2 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{B_2}{A_2} = 2 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} = 2 - (3 + \sqrt{5}) = -(1 + \sqrt{5}) = -3.24$$

D'où les solutions générales s'écrivent : (0.5 + 0.5)

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = 1.24A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - 3.24A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

4. (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5)

$$x_1(0) = 1 \rightarrow A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 = 1 \quad (1)$$

$$x_2(0) = -1 \rightarrow \mu_1 A_1 \cos \phi_1 + \mu_2 A_2 \cos \phi_2 = -1 \quad (2)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \rightarrow A_1 \omega_1 \sin \phi_1 + A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \rightarrow \mu_1 A_1 \omega_1 \sin \phi_1 + \mu_2 A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (4)$$

$$\mu_2(1) - (2) = (\mu_2 - \mu_1)A_1 \cos \phi_1 = 2 \quad (5)$$

$$\mu_1(1) - (2) = (\mu_1 - \mu_2)A_2 \cos \phi_2 = 2 \quad (6)$$

$$\mu_2(3) - (4) = (\mu_2 - \mu_1)\omega_1 A_1 \sin \phi_1 = 0 \quad (7)$$

$$\mu_1(1) - (2) = (\mu_1 - \mu_2)A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (8)$$

De (7) et (8) on déduit $\phi_1 = \phi_2 = 0$

On remplace dans (5) et (6) on trouve $A_1 = \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} = 0.45$ et $A_2 = \frac{2}{\mu_1 - \mu_2} = -0.45$

D'où les solutions s'écrivent

$$x_1 = 0.45 \cos \omega_1 t - 0.45 \cos \omega_2 t$$

$$x_2 = 0.55 \cos \omega_1 t - 1.46 \cos \omega_2 t$$