

Nom et prénom :

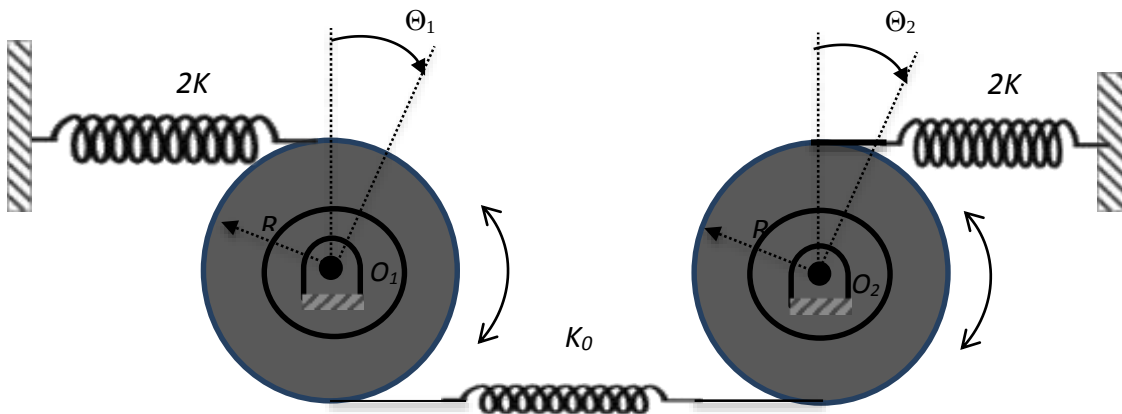
NOTE :

/ 20

Section :Groupe :

Deux disques de masse m et de moment d'inertie $J_0 = mR^2$ chacun sont libres de tourner autour de leurs axes de rotation passant par O_1 et O_2 comme dans la figure ci-dessous.

On suppose que pour $\theta_1=0$ et $\theta_2=0$ les ressorts sont au repos. On se propose d'étudier le mouvement du système lorsqu'un disque est écarté par rapport à sa position d'équilibre d'un angle de 10° puis relâchée sans vitesse initiale.



- 1) Exprimer Le Lagrangien du système (4 pts)
- 2) Ecrire les équations de mouvement (4 pts)
- 3) Trouver les pulsations propres de ce système (4 pts)
- 4) Exprimer la forme générale des solutions du système (2 pts)
- 5)
 - a. A partir de l'énoncé de l'exercice exprimer les conditions initiales (2 pts)
 - b. Trouver donc les solutions exactes du système. (4 pts)

Solution :

$$1) L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(2k + k_0)R^2\theta_1^2 - \frac{1}{2}(2k + k_0)R^2\theta_2^2 + k_0R^2\theta_1\theta_2$$

2) Les équations de mouvements : c'est un système libre non amorti à 2DDL, on obtient après simplification

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}_1 + (2k + k_0)\theta_1 - k_0\theta_2 = 0 & (1) \\ m\ddot{\theta}_2 + (2k + k_0)\theta_2 - k_0\theta_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

3) On remarque aisément que c'est un système symétrique donc on peut utiliser le changement de variable

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \theta_1 + \theta_2 \\ \Phi_2 &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned} \quad (3)$$

On obtient en faisant (1) + (2) : $m\Phi_1 + k\Phi_1 = 0$, SHM $\Phi_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ et $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

On obtient en faisant (1) - (2) : $m\Phi_2 - (2k + 2k_0)\Phi_2 = 0$, SHM $\Phi_2 = B\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k+2k_0}{m}}$

ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres du système.

4) On utilisant le système (3) on remonte à la forme générale des deux solutions θ_1 et θ_2 , on obtient :

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}(A\cos(\omega_1 t + \phi_1) - B\cos(\omega_2 t + \phi_2)) \end{cases}$$

5) a) d'après l'énoncé on déduit $\theta_1(0) = \frac{\pi}{18}$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

b) on utilise les conditions initiales pour déterminer les 4 constantes

$$\begin{cases} A\cos(\phi_1) + B\cos(\phi_2) = \frac{\pi}{9} & (1) \\ A\cos(\phi_1) - B\cos(\phi_2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\omega_1\sin(\phi_1) + B\omega_2\sin(\phi_2) = 0 & (3) \\ A\omega_1\sin(\phi_1) - B\omega_2\sin(\phi_2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) + (2) \rightarrow A\cos(\phi_1) = \frac{\pi}{18} & (5) \\ (1) - (2) \rightarrow B\cos(\phi_2) = \frac{\pi}{18} & (6) \end{cases}$$

$$(3) + (4) \rightarrow A\sin(\phi_1) = 0 \quad (7)$$

$$(3) - (4) \rightarrow B\sin(\phi_2) = 0 \quad (8)$$

Si on fait $(5)^2 + (7)^2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2$ on déduit que $A = \pm \frac{\pi}{18} \neq 0$ car $\cos(\phi_1)^2 + \sin(\phi_1)^2 = 1$

De (7) on déduit que $\sin(\phi_1) = 0$ $\boxed{\phi_1 = 0}$

Si on remplace dans (5) on a $\boxed{A = \frac{\pi}{18}}$

De même $(6)^2 + (8)^2 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^2$ on déduit que $B = \pm \frac{\pi}{36} \neq 0$ car $\cos(\phi_2)^2 + \sin(\phi_2)^2 = 1$

De (8) on déduit que $\sin(\phi_2) = 0$ $\boxed{\phi_2 = 0}$

Si on remplace dans (6) on a $\boxed{B = \frac{\pi}{18}}$

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\pi}{36}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\ \theta_2(t) = \frac{\pi}{36}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \end{cases}$$