Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Solution de l'Examen Final, le 05 Janvier 2017

Exercice n°1 : Système à un degré de liberté libre

1. $L=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(a\theta)^2-c$ avec $J=\frac{M(4a)^2}{12}+Ma^2=\frac{7}{3}Ma^2$ et **0 ,5 point**

$D=\frac{1}{2}\alpha(3a\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\alpha\left(a\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha(10a^2)\dot{\theta}^2$ **0 ,5 point**

Equation du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta}-\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} \text{ i.e } \frac{7ma^2}{3}\ddot{\theta}+10a^2\alpha\dot{\theta}+ka^2\theta=0 \text{ ou } \ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \text{ avec } \begin{cases}\delta=\frac{15\alpha}{7m}\\ \omega_0^2=\frac{3k}{7m}\end{cases}$$ **1 point**

2. $d=\frac{1}{4}Ln\frac{0.1}{0.01}=0.576=\delta T_a$ avec $T_a=0.6s$

$\omega_0^2=\omega_a^2+\delta^2$

$\delta=\frac{d}{T_a}$ et $\omega_0^2=\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2+\left(\frac{d}{T_a}\right)^2$; **1 point**

AN : $\delta=0.96s^{-1}$ et $\omega_0\approx10.52\,rd/s$ i.e $\alpha=4.67kg/s$ et $k\approx2582N/m$ **1 point**

3. $\alpha=\alpha_c$ tel que $\delta=\omega_0$

$\alpha_c=\frac{\sqrt{21km}}{15}$ **1 point**

AN : $\alpha_c=49.1kg/s$

Exercice n°2 : Système à un degré de liberté forcé **0,5 point**

1. $L=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$ avec $J=\frac{MR^2}{2}$ et $x=R\theta$

$L=\frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$ et $D=\frac{1}{2}\alpha\left(\dot{x}-\dot{s}\right)^2$ **0,5 point**

Equation différentielle du mouvement : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial\dot{x}}$ i.e $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=A_0\cos(\omega t)$

Avec $\delta=\frac{\alpha}{3M}$, $\omega_0^2=\frac{2k}{3M}$ et $A_0=\frac{2\alpha\omega}{3M}S_0$ **1 point**

2. La solution générale :

Avec $\delta=6s^{-1}$ et $\omega_0=6rd/s$; **1 point**

$x(t)=\left(A_1+A_2t\right)e^{-6t}+X_0(\omega).\cos\left(\omega t+\Phi(\omega)\right)$

avec $\begin{cases}X_0(\omega)=\frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}\\ \Phi(\omega)=-\text{arctg}\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\end{cases}$ **0,5 point**

3. En régime permanent : $x(t)=X_0(\omega).\cos\left(\omega t+\Phi(\omega)\right)$ **0,5 point**

Pour $\omega=\omega_0$:

$X(\omega_0)=S_0$ et $\Phi(\omega_0)=-\frac{\pi}{2}rd$ $\qquad x(t)=S_0.\cos\left(\omega_0t-\frac{\pi}{2}\right)$ **1 point**

Exercice n°3 (05 points) : Système à deux degrés libre

1- $\ddot{x}_1 + \frac{(k+k_0)}{m}x_1 - \frac{k_0}{m}x_2 = 0$, $\ddot{x}_2 + \frac{(k+k_0)}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0$ **1 point**

2- $\det\begin{bmatrix}\{-m\omega^2+(k+k_0)\} & -k_0 \\ -k_0 & \{-m\omega^2+(k+k_0)\}\end{bmatrix}=0$, $\Rightarrow$ $m^2\omega^4 - 2(k+k_0)m\omega^2 + k(k+2k_0)=0$ **1 point**

Solutions (k_0<<k) : $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2=\sqrt{\frac{k+2k_0}{m}}\approx\left(1+\frac{k_0}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$; Rapports d'amplitude : r_1= +1 et r_2= -1 **1 point**

Mouvements généraux des deux masses et conditions initiales :

$x_1(t)=X_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+X_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$; $x_2(t)=X_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-X_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$

Avec les conditions initiales : $x_1(0)=A$, $\dot{x}(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1(0)=X_1\cos\phi_1+X_2\cos\phi_2=A \\ x_2(0)=X_1\cos\phi_1-X_2\cos\phi_2=0\end{array} ; \begin{array}{l}\dot{x}_1(0)=-\omega_1X_1\sin\phi_1-\omega_2X_2\sin\phi_2=0 \\ \dot{x}_2(0)=-\omega_1X_1\sin\phi_1+\omega_2X_2\sin\phi_2=0\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{A}{2}\cos\omega_1 t+\frac{A}{2}\cos\omega_2 t \quad ; \quad x_2=\frac{A}{2}\cos\omega_1 t-\frac{A}{2}\cos\omega_2 t$$ **1 point**

3- $x_1=A\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$; $x_2=A\sin\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\sin\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$ **1 point**

$K\approx\frac{k_0}{k}<<1$: $\omega_1-\omega_2=K\omega_1$; $\omega_1+\omega_2\approx 2\omega_1$ $\Rightarrow$

$x_1(t)=A\cos\left(\frac{K\omega_1 t}{2}\right)\cos\omega_1 t$, $x_2(t)=A\sin\left(\frac{K\omega_1 t}{2}\right)\sin\omega_1 t$

Les oscillations des deux masses présentent des battements $T_b=\frac{2\pi}{k\omega_1}$ et oscillent en quadrature.

Exercice n°4(05 points) : Système à deux degrés forcé

1. Les équations différentielles du système mécanique :

$m_1\ddot{x}_1+\alpha_1\dot{x}_1+k_1x_1+\alpha_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_2(x_1-x_2)=F$; $m_2\ddot{x}_2\alpha_2(\dot{x}_2-\overline{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=0$ **1 point**

2. Equations du circuit électrique analogue ($q_i=Q_ie^{j\omega t}$ et $V=V_0e^{j\omega t}$),: **1 point**

$L_1\ddot{q}_1+R_1\dot{q}_1+\frac{q_1}{c_1}+R_2(\dot{q}_1-\dot{q}_2)+\frac{q_1-q_2}{c_2}=V$

$L_2\ddot{q}_2+R_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)+\frac{q_2-q_1}{c_2}=0$

$\left[-L_1\omega^2+j(R_1+R_2)\omega+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)\right]q_1-\left(jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)q_2=V(t)$ **1 point**

$\left(-L_2\omega^2+jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)q_2-\left(jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)q_1=0$

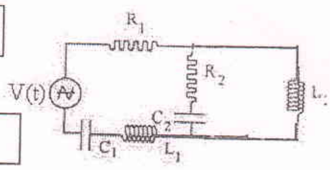

Schéma du circuit électrique

3- En utilisant $I_1(t)$ et $I_2(t)$:

$$\left[-L_1\omega^2+j(R_1+R_2)\omega+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)\right]I_1-\left(jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)I_2=j\omega V(t)$$

$$\left(-L_2\omega^2+jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)I_2-\left(jR_2\omega+\frac{1}{c_2}\right)I_1=0$$ **1 point**

Après des calculs, on obtient : **1 point**

$$Z_e(\omega)=\frac{V}{I_1}=\left[\frac{1-L_1c_1\omega^2+jR_1C_1\omega}{jc_1\omega}+\frac{-R_2L_{21}c_2\omega^2+jL_2\omega}{1+L_2c_2\omega^2+jR_2c_2\omega}\right]$$