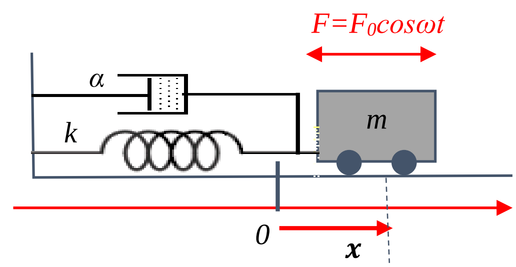
Chapitre 2 : Systèmes oscillatoires forcés à un degré de liberté

Introduction

- Une oscillation forcée contenant un amortissement ou non est une oscillation entretenue par une force externe
- Dans ce chapitre nous nous limiterons à traiter le cas d'une force sinusoïdale.
- La forme générale de l'équation de mouvement d'un oscillateur forcé est obtenue en traitant un exemple simple.

Equation de mouvement

- ω: La pulsation d'excitation de la force.



$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,,\quad E_p = \frac{1}{2}kx^2\ ,D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 :\ L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_x$$

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_c \cos\omega t}\quad cette\ équation\ peut\ s'écrire\ sous\ la\ forme:$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega t}\ :\ \delta = \frac{\alpha}{2m}\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \ et\ \ A_0 = \frac{F_0}{m} \qquad (I)$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit comme : $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ ou :

x_H : est la solution de l'équation homogène: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

x_p : est de la même forme que le second membre. $x_p(t) = \boldsymbol{X}\cos(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$

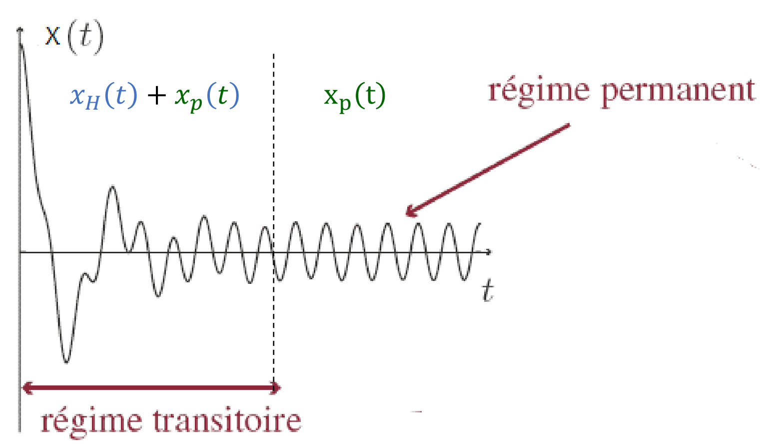
$$x(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\delta t + \sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-\delta t - \sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} & (si\ \delta > \omega_0) \\ (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} & (si\ \delta = \omega_0) \\ Ae^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \phi)\ ,\ \ \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} & (si\ \delta < \omega_0) \end{cases} \quad + \quad \boldsymbol{X\ cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$$

Les constantes $C_1, C_2, A\ et\ \phi$ sont des constantes déterminées à partir de conditions initiales de $x(t)$ et les deux nouvelles constantes $\boldsymbol{X}\ et\ \boldsymbol{\Phi}$ sont déterminés par le fait que x_p (la solution particulière) est solution de (I).

Nous savons du chapitre 1 que les trois solutions possibles de l'équation homogène tendent vers 0 lorsque t tend vers ∞.

Pratiquement, lorsque $t > \frac{3}{\delta}$, on considère que l'oscillation est en régime permanant $x_p(t)$

$$x(t) = \boldsymbol{X\ cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$$



Détermination de $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{\Phi}$

Utilison les nombres complexes :

Tout nombre complexe peut s'écrire sous une des forme suivantes :

$$\begin{aligned} z &= re^{i\phi} && \text{Forme exponentielle} \\ &= r(\cos\phi + i\sin\phi) && \text{Forme trigonométrique} \\ &= a + ib && \text{Forme algebrique} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$: son *module*

$\cos\phi = \frac{a}{r}\ \ et \sin\phi = \frac{b}{r} \to\ \tan\phi = \frac{b}{a} \to \boldsymbol{\phi} = \mathbf{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)$: *son argument*

Propriétes :

- Pour tout nombre réèl on a : $b = 0 \to z = a \to\ \boldsymbol{r = a\ \ et\ \ \phi = 0}$
- Pour tout nombre complexe sous forme $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$, $r = \frac{r_1}{r_2}\ \ et\ \phi = \phi_1 - \phi_2$

La méthode des nombres complexes consiste à associer à $x(t) = Xcos(\omega t + \Phi)$ le nombre complexe correspondant

$\bar{x}(t) = X\big(cos(\omega t + \Phi) + \mathrm{i}\, sin(\omega t + \Phi)\big) =\ X\, e^{i(\omega t + \Phi)}\ \ \ de\ façon$ à $ce\ que\ \ x(t) = \Re\big(\bar{x}(t)\big)$

$\bar{x}(t) = X\, e^{i(\omega t + \Phi)} = Xe^{i\Phi} e^{i\omega t} = \bar{X}\, e^{i\omega t}\ \ \ avec\ \ \ \ \bar{X} = Xe^{i\Phi}$

Nos deux constantes $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{\Phi}$ sont le module et l'argument du nombre complexe $\bar{X}$.

$$\bar{x} = \bar{X}\, e^{i\omega t} \to\ \ \dot{\bar{x}} = i\omega \bar{X}\, e^{i\omega t}\ ,\qquad \ddot{\bar{x}} = -\omega^2 \bar{X}\, e^{i\omega t}$$

On remplace dans (I) et on trouve :

$$-\omega^2 \bar{X}\, \cancel{e^{i\omega t}} + 2\delta(i\omega)\bar{X}\, \cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2 \bar{X}\, \cancel{e^{i\omega t}} = A_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

Après simplification on trouve l'équation :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta)\bar{X} = A_0,\ \ d'ou\ \ \bar{X} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\omega\delta)}$$

$$le\ module\ X = |\bar{X}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$$

$$l'argument\ \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Arg}(\bar{X}) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

A retenir :

L'équation différentielle $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega t$ a pour solution $x(t) = x_H(t) + \boldsymbol{X\, cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$

En régime permanent $(t > 3\delta^{-1})$

$$x(t) = \boldsymbol{X\, cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$$

Avec

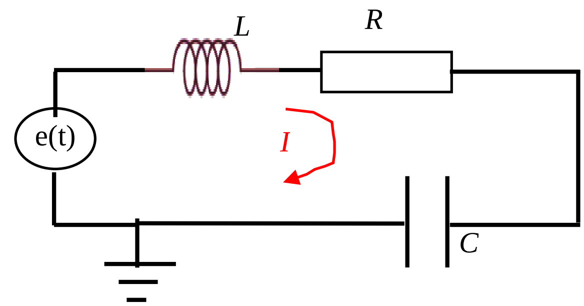
$$\boldsymbol{X} = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}\quad et\ \boldsymbol{\Phi} = -\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Comme le régime transitoire est très bref en général, le régime permanent est le plus intéressant à considérer habituellement.

Remarques :

- Les deux constantes $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{\Phi}$ (amplitude et déphasage de la solution permanente) dépendent de la pulsation d'excitation ω de la force.
- Si la forme du second membre était un $\sin \omega t$ on peut vérifier aisément qu'on aurait l'expression de $x(t) = \boldsymbol{X}\, sin(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$ pour les même expressions de $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{\Phi}$**.**

Equivalence électrique - mécanique



Dans un circuit électrique RLC forcé ($e(t) = e_0 \sin \omega t$) l'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge q(t) est la suivante :

$$V_L + V_R + V_C = e(t) \rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = e_0 \sin \omega t$$

En remplaçant $q = CV_c$ dans l'équation on obtient :

$$LC\ddot{V_c} + RC\dot{V_c} + V_c = e_0 \sin \omega t \rightarrow \ddot{V_c} + \frac{R}{L}\dot{V_c} + \frac{1}{LC}V_c = \frac{e_0}{LC}\sin \omega t$$

$$\boldsymbol{\ddot{V}_c + 2\delta \dot{V}_c + \omega_0^2 V_c = \omega_0^2 e_0 \sin \omega t} \quad avec\ \delta = \frac{R}{2L} \quad , \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ \ et\ A_0 = \omega_0^2 e_0$$

De point de vue mathématique cette dernière équation est identique à l'équation (I)

Etudier l'évolution de $x(t)$ dans un système mécanique revient à étudier l'évolution de $V_c(t)$ en un circuit électrique RLC.

De même on peut écrire la solution en régime permanent :

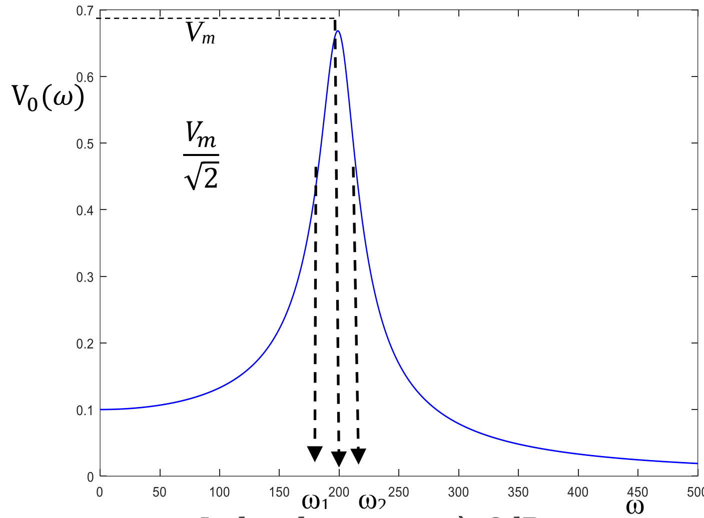
$$\boldsymbol{V_c(t) = V_0 \sin(\omega t + \Phi)}$$

$$avec\ \ V_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 e_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \quad et\ tan(\phi) = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

On peut ainsi, dresser un tableau d'équivalence entre les paramètres électriques et mécaniques :

Mécanique		**Electrique**	
Paramètre	**Symbole**	**Paramètre**	**Symbole**
Masse (Kg)	m	Inductance d'une bobine	L (**H**enry)
Constante d'amortissement ($\boldsymbol{N.M^{-1}.S}$)	α	Résistance	R (**Ω** ohm)
Constante de raideur ($\boldsymbol{N.M^{-1}}$)	k	Capacité d'un condensateur	1/C (**C** en **F**arad)
La force ($\boldsymbol{Newton}$)	$F(t)$	Tension d'un générateur	e(t) (**V**olt)
La coordonnée ($\boldsymbol{Mètre}$)	$x(t)$	Tension d'un condensateur	Vc (**V**olt)

Etude de la variation de $V_0(\omega)$



La bande passante à -3dB

On peut simplement voir que :

Lorsque ω tend vers l'infini alors $V_0(\omega)$ tend vers 0

Lorsque ω =0 alors $V_0(\omega) = 0$

$$V_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 e_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4(\delta\omega)^2}}$$

Voyon si $V_0(\omega)$ a un maximum : soit

$$V_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 e_0}{\sqrt{f(\omega)}}$$

si $V_0(\omega)$ est maximum alors f(ω) est minimum pour cela calculons $f'(\omega)$=0

$$f'(\omega) = 2((\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8\delta^2\omega = 0$$

$$-4\omega((\omega_0^2-\omega^2+2\delta^2) = 0$$

La solution acceptée est : $\boldsymbol{\omega_R} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$

A retenir : Lorsque fait varier la pulsation (ou la fréquence) d'excitation, l'amplitude du signal passe par maximum pour une pulsation $\omega = \boldsymbol{\omega_R}$: c'st le phénomène de résonnance.

- Le phénomène de **résonnance** n'est observé que si la condition d'existance suivante est vérifiée:
$$\omega_0^2 - 2\delta^2 \geq 0 \rightarrow \ \boldsymbol{\delta} \leq \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$$
- La bande passante à -3db est définie comme $B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de telle sorte que $V_0(\omega_1) = V_0(\omega_2) = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$
- Pour les faibles amortissemnts, les approximations suivantes sont très pratiques $B = \Delta\omega \approx 2\delta \ et \ \omega_R \approx \omega_0$

Facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini comme suit :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

En utilisant une variable $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le facteur de qualité Q, l'expression de V_0 devient :

$$V_0(r) = \frac{e_0}{\sqrt{(1-r^2)^2+\frac{r^2}{Q^2}}} = \frac{e_0 Q}{\sqrt{Q^2(1-r^2)^2+r^2}} \quad (on\ met\ en\ facteur\ \omega_0^4\ de\ la\ racine)$$

$$dans\ ce\ cas\ , pour\ \omega = \omega_R\ \ et\ donc\ \ r_R^2 = \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\rightarrow V_m = V_0(r_R) = \frac{Qe_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \approx Qe_0 \;\; (si\ on\ néglige \frac{1}{4Q^2}\ devant\ 1)$$

Remarques :

- Au fur et à mesure que le facteur de qualité est grand la résonnance est plus prononcée.
- La résonnance n'existe que pour les petits amortissements en dessous de la valeur $\frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$
- A la résonnance, la tension aux bornes de C est la tension du générateur multipliée par Q