

Chapitre 3 : Systèmes oscillatoires libres à deux degrés de liberté

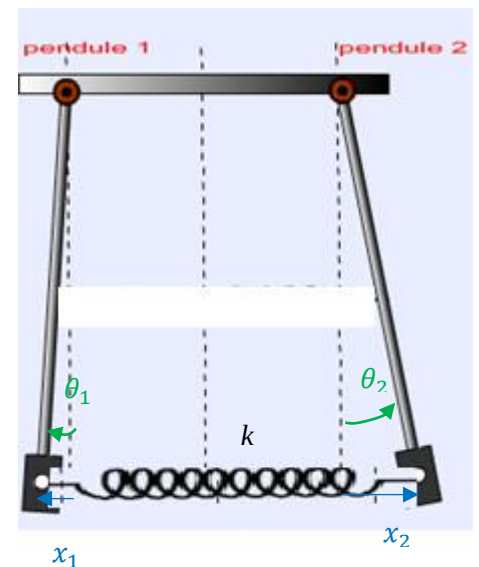
➤ Introduction

Nous avons vu que la description d'un oscillateur à 1 degré de liberté se résume à définir une variable généralisée par rapport à son état d'équilibre (position, angle, charge, tension..).

Pour un système à deux degré de liberté ; il est nécessaire, de définir deux variables généralisées par rapport à deux origines distinctes, correspondant chacune à la position d'équilibre de la masse correspondante, pour pouvoir décrire un tel système. Ainsi, les deux variables généralisées sont indépendantes.

La figure ci-contre représente deux pendules couplés par un ressort de raideur K . $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont les écarts angulaires par rapport à la position d'équilibre (verticale) et constituent les coordonnées généralisées à utiliser pour décrire le mouvement pour les petites oscillations.

Il est possible de choisir un autre couple de variables généralisées. Par exemple : $x_1(t) = l\theta_1(t)$, $x_2(t) = l\theta_2(t)$ définis comme les écarts des masses par rapport aux positions d'équilibre x_{10} et x_{20} sur l'axe horizontal. L'état de ce système peut être défini par le couple $\{\theta_1(t), \theta_2(t)\}$ ou $\{x_1(t), x_2(t)\}$ au choix.

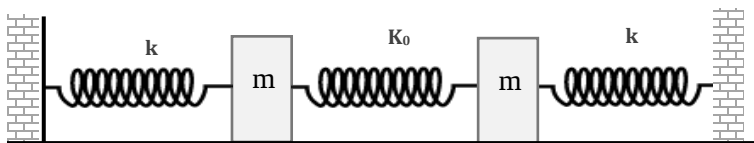


➤ Exemples d'oscillateurs à deux degré de liberté

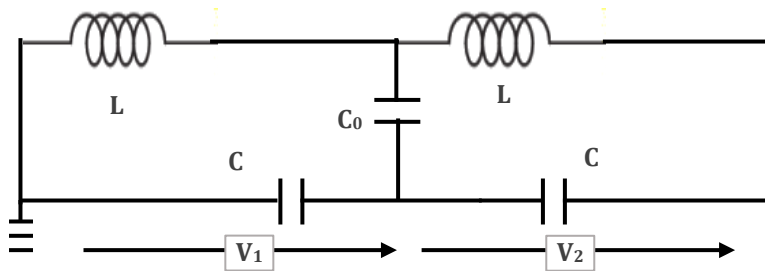
Les deux oscillateurs suivants sont des systèmes à 2 DDL.

L'un est un système de deux oscillateurs mécaniques couplés par un ressort de couplage k_0 . On appelle un tel couplage par couplage élastique.

Le deuxième est un oscillateur électrique. D'après les équivalences que nous avons établies dans le chapitre 2, les deux oscillateurs sont équivalents. C'est-à-dire qu'ils gérés par un système d'équations différentielles identiques de point de vue mathématique.



Ce système mécanique est équivalent au système électrique suivant :



Etudier l'évolution de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ revient à étudier l'évolution de $V_1(t)$ et $V_2(t)$ tensions aux bornes des deux condensateurs.

➤ Recherche de l'équation de mouvement

Cherchons les équations de mouvement, du système mécanique, régissant les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'aide du formalisme de Lagrange.

- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$
- Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(k + k_0)x_1^2 + \frac{1}{2}(k + k_0)x_2^2 - k_0x_1x_2$
- Le Lagrangien du système : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k + k_0)x_1^2 - \frac{1}{2}(k + k_0)x_2^2 + k_0x_1x_2$
- Les équations de Lagrange et équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k_0)x_1 - k_0x_2 = 0 & (a) \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 & (b) \end{cases}$$

On remarque que les deux équations différentielles ont des coefficients identiques :

$$\begin{cases} (a) + (b) : m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + (k + k_0)(x_1 + x_2) - k_0(x_1 + x_2) = 0 \rightarrow m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \\ (a) - (b) : m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k + k_0)(x_1 - x_2) + k_0(x_1 - x_2) = 0 \rightarrow m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k + 2k_0)(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant $\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$ obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 + kX_1 = 0 & \rightarrow \ddot{X}_1 + \frac{k}{m}X_1 = 0 & \rightarrow X_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \text{ avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ m\ddot{X}_2 + (k + 2k_0)X_2 = 0 & \rightarrow \ddot{X}_2 + \frac{(k + 2k_0)}{m}X_2 = 0 & \rightarrow X_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{ avec } \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = 2x_1 \\ X_1 - X_2 = 2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ x_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \end{cases}$$

➤ Phénomène de battement entre les 2 oscillateurs.

Dans le cas d'un couplage lâche ($k_0 \ll k$) les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 sont proches et on verrait le **phénomène de battement** se produire pour deux solutions x_1 et x_2 :

Dans ce cas, si à l'instant initial, on écarte l'une des masses d'une valeur x_0 , l'autre étant retenue, et on relâche à $t=0$ pour laisser le système osciller librement ; on observe deux oscillations modulées en amplitude.

L'oscillation de la plus grande fréquence est modulée par celle de la plus faible fréquence. Ces deux fréquences sont en fonction des fréquences propres.

Les conditions initiales : $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0)$

$$x_1(0) = 0 : \frac{A_1}{2} \cos \phi_1 + \frac{A_2}{2} \cos \phi_2 = 0 \quad (a) \rightarrow (a) + (b) : A_1 \cos \phi_1 = x_0$$

$$x_2(0) = x_0 : \frac{A_1}{2} \cos \phi_1 - \frac{A_2}{2} \cos \phi_2 = \theta_0 \quad (b) \rightarrow (a) - (b) : A_2 \cos \phi_2 = -x_0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 : \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \phi_1 + \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (c) \rightarrow (c) + (d) : A_1 \omega_1 \sin \phi_1 = 0$$

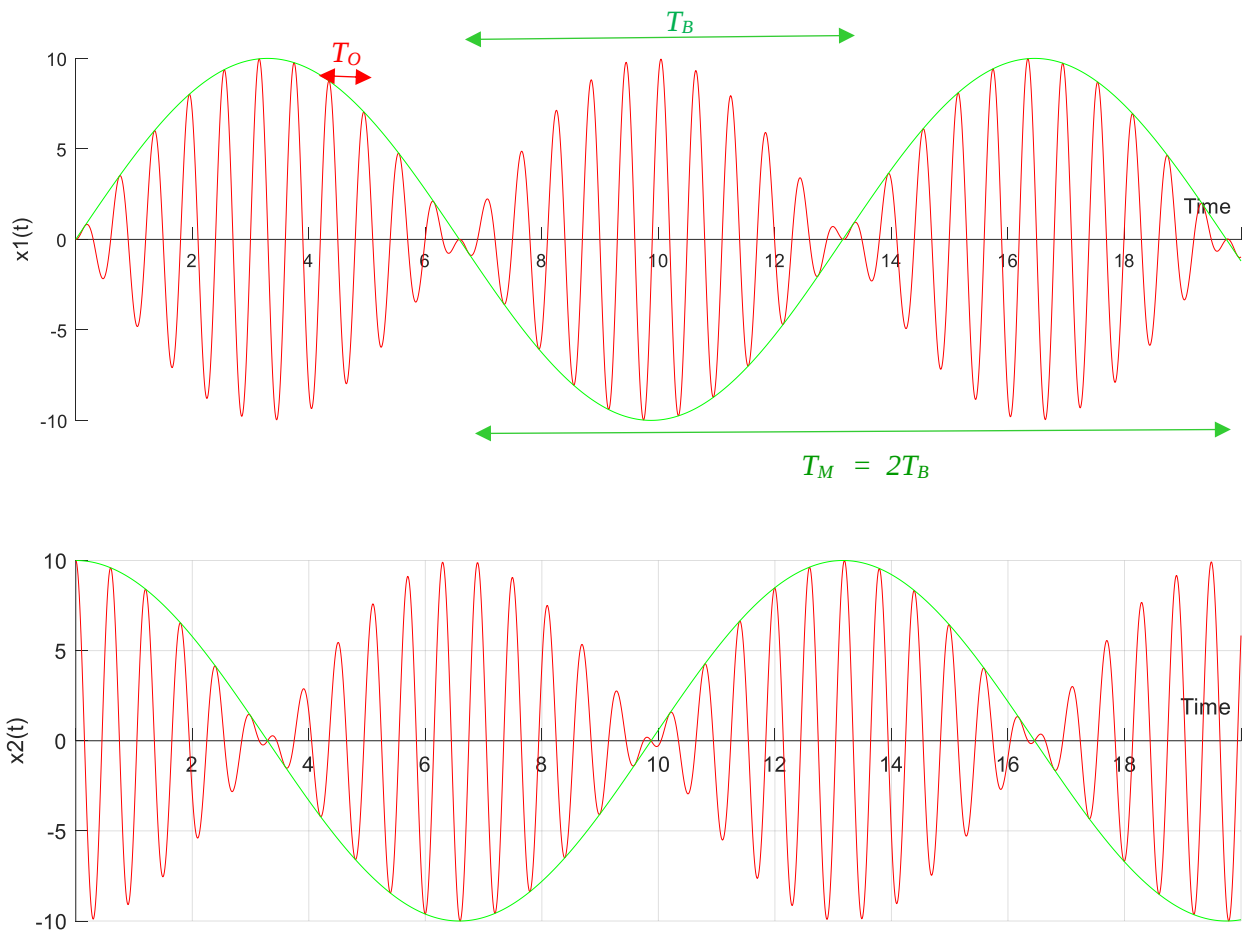
$$\dot{x}_2(0) = 0 : \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \phi_1 - \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (d) \rightarrow (c) - (d) : A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0$$

De (c) et (d) on déduit $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ($A_1, A_2 \neq 0$) $\rightarrow$ ensuite de (a) et (b) $A_1 = -A_2 = x_0$

Les deux solutions sont donc

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = x_0 \left(\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) * \left(\sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$

$$x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = x_0 \left(\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) * \left(\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$



Remarque :

➤ Dans le circuit électrique ci-dessus on écrira :

$$V_1(t) = \frac{e_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = e_0 \left(\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) * \left(\sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$

$$V_2(t) = \frac{e_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = e_0 \left(\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) * \left(\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$

$$\begin{aligned} \omega_M &= \frac{2\pi}{T_M} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ \omega_O &= \frac{2\pi}{T_O} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_O - \omega_M \\ \omega_2 &= \omega_O + \omega_M \end{aligned}$$

➤ Le premier mode d'oscillation peut être obtenu par addition

$$V_1(t) + V_2(t) = e_0 \cos \omega_1 t$$

- Le deuxième mode d'oscillation peut être obtenu par soustraction

$$V_1(t) - V_2(t) = e_0 \cos \omega_2 t$$

- La visualisation de la tension au point B donne la tension $V_1(t) + V_2(t)$ et permet donc de mesurer la pulsation du premier mode ω_1 .
- La visualisation de la tension au point P donne la tension $V_1(t) - V_2(t)$ et permet donc de mesurer la pulsation du deuxième mode ω_2 .