Chapitre 2 : Systèmes oscillatoires libres à deux degrés de liberté (2ème partie)

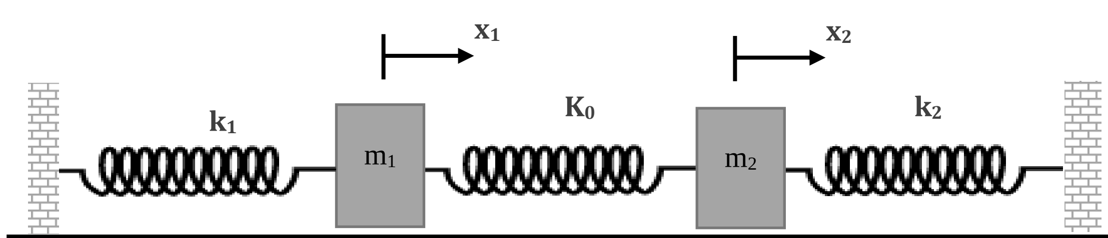
➢ Méthode du traitement général

La méthode à suivre est la suivante :

1. On écrit les 2 équations différentielles pour les deux variables généralisées soient x1 et x2.
2. On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :
   $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 + \phi 1)$ et $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 + \phi 2)$
   *C*ela signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.
   On peut aussi utiliser la représentation complexe, on obtient un système algébrique, linéaire et homogène.
3. La résolution du système d'équations permet d'obtenir 2 pulsations ω_1 et ω_2 ; ce sont les pulsations propres (l'équivalent du ω_0 pour l'oscillateur libre 1DDL).
4. On détermine les rapports d'amplitudes : (on utilise le système d'équations algébrique)
   On substitue ensuite ω_1 dans l'une des 2 équations et on obtient le rapport d'amplitude $\mu_1 = \frac{A_2}{A_1}$ pour le 1er mode
   On substitue ensuite ω_2 dans l'une des 2 équations et on obtient le rapport d'amplitude $\mu_2 = \frac{A_2}{A_1}$ pour le 2e mode

1) Recherche de l'équation de mouvement

On considère le système symétrique suivant : deux oscillateurs masse-ressort identiques couplés par un ressort de raideur k_0 (couplage élastique).



Cherchons les équations de mouvement, du système mécanique, régissant les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'aide du formalisme de Lagrange.

- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$
- Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_0)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k_0)x_2^2 - k_0x_1x_2$
- Le Lagrangien du système : $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_0)x_1^2 - \frac{1}{2}(k_2 + k_0)x_2^2 + k_0x_1x_2$

- Les équations de Lagrange et équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 - k_0 x_2 = 0 \quad (a) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 - k_0 x_1 = 0 \quad (b) \end{cases}$$

2) On suppose une solution harmonique avec une pulsation quelconque ω.

Dans ce cas, en utilisant la représentation complexe comme suit:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \rightarrow \bar{x}_1 = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} = \bar{A}_1 e^{i\omega t} \; avec \; \bar{A}_1 = A_1 e^{i\phi_1}$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow \bar{x}_2 = A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = \bar{A}_2 e^{i\omega t} \; avec \; \bar{A}_2 = A_2 e^{i\phi_2}$$

Calcul des dérivées :

$$\dot{\bar{x}}_1 = i\omega\bar{A}_1 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{\bar{x}}_1 = -\omega^2\bar{A}_1 e^{i\omega t} = \boldsymbol{-\omega^2\bar{x}_1}$$
$$\dot{\bar{x}}_2 = i\omega\bar{A}_2 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{\bar{x}}_2 = -\omega^2\bar{A}_2 e^{i\omega t} = \boldsymbol{-\omega^2\bar{x}_2}$$

Ou bien :

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\dot{x}_1 = \omega_1 A_1\cos(\omega t + \phi_1) \rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1\cos(\omega t + \phi_1) = \boldsymbol{-\omega^2 x_1}$$
$$\dot{x}_2 = \omega A_2\cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2\cos(\omega t + \phi_2) = \boldsymbol{-\omega^2 x_2}$$

Et en remplaçant dans les équations différentielles de mouvement ci-dessus et on obtient :

$$\begin{cases} (k_1 + k_0 - \omega^2 m_1)\bar{x}_1 - k_0\bar{x}_2 = 0 \\ (k_2 + k_0 - \omega^2 m_2)\bar{x}_2 - k_0\bar{x}_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (k_1 + k_0 - \omega^2 m_1)\bar{x}_1 - k_0\bar{x}_2 = 0 \\ -k_0\bar{x}_1 + (k_2 + k_0 - \omega^2 m_2)\bar{x}_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_0 - \omega^2 m_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_2 + k_0 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I)$$

3) Résolution du système algébrique :

C’est un système d’équations algébriques homogène. Il ne possède de solutions non triviales $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Que si le déterminant de la matrice est nul.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_0 - \omega^2 m_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_2 + k_0 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_0 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_0 - \omega^2 m_2) - k_0^2 = 0$$

$$m_1 m_2\omega^4 + (\,(k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1)\omega^2 + (k_1 + k_0)(k_2 + k_0) - k_0^2 = 0$$

C'est l'équation aux pulsations propres. En posant $\Omega = \omega^2$ on obtient une équation de second degré :

$$m_1 m_2 \Omega^2 + ((k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1)\Omega + (k_1 + k_0)(k_2 + k_0) - k_0^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation s'écrit

$$\Delta = ((k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1)^2 - 4m_1 m_2((k_1 + k_0)(k_2 + k_0) - k_0^2)$$

$$\Delta = ((k_1 + k_0)m_2 - (k_2 + k_0)m_1)^2 + 4m_1 m_2 k_0^2) > 0$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{(k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}$$

Les deux racines positives sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1 - \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_2} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_0)m_2 + (k_2 + k_0)m_1 + \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}}$$

Conclusion

- L'équation aux pulsations propres possède toujours des solutions positivesω_1 *et* ω_2.
- Deux solutions sont possibles : $\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ *et* $\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ ce sont les modes propres. Donc le système peut osciller exclusivement dans l'un ou l'autre des deux modes propres.
- Mathématiquement la solution générale sera une combinaison des deux modes propres:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

4) Les rapports d'amplitude

Dans cette dernière écriture des solutions x1 et x2 il y a 6 constantes il faudra en éliminer deux grâce au fait que les deux ω_1 *et* ω_2 vérifient le système (I).

- Si on remplace $\omega = \omega_1$ on obtient le rapport μ_1 à partir d'une des deux équations au choix:

  Dans ce cas les deux solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2 = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

$$\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \frac{\bar{A}_{21}}{\bar{A}_{11}} = \frac{k_1 + k_0 - \omega_1^2 m_1}{k_0} = \mu_1$$

$$\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

- Si on remplace $\omega = \omega_2$ on obtient le rapport à partir d'une des deux équations au choix:

  Dans ce cas les deux solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

$$\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}}$$

$$\frac{\overline{x}_2}{\overline{x}_1} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k_1 + k_0 - \omega_2^2 m_1}{k_0} = \mu_2$$

Les deux solutions s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Ainsi on a 4 constantes A_{11}, A_{12}, ϕ_1 *et* ϕ_2 qui sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0) \; et \; \dot{x}_2(0)$$

Cas particulier :

$$m_1 = m_2 \quad et \; k_1 = k_2$$

Dans ce cas le discriminant s'écrit : $\Delta = 4m^2k_0^2 = (2mk)^2$

D'où les pulsations propres :

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(k + k_0)m + (k + k_0)m \pm 2\mathrm{mk}}{2m^2}} = \sqrt{\frac{(k + k_0) \pm \mathrm{k_0}}{m}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m}} \quad et \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}$$

$$\mu_1 = \frac{k_1 + k_0 - \omega_1^2 m_1}{k_0} = \frac{k + k_0 - \frac{k}{m}m}{k_0} = 1$$

Ce qui veut dire que les deux oscillateurs en mode 1 oscillent en phase.

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2 = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

Dans ce cas le ressort de couplage n'a pas d'effet. Les deux oscillateurs oscillent comme si ils étaient seuls.

$$\mu_2 = \frac{k_1 + k_0 - \omega_2^2 m_1}{k_0} = \frac{k + k_0 - \frac{k + 2k_0}{m}m}{k_0} = -1$$

Ce qui veut dire que les deux oscillateurs en mode 2 oscillent en opposition de phase

$$\begin{cases} x_1 = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Dans ce cas le ressort de couplage fournit son effet maximum et les deux masses oscillent en sens contraire.

Les solutions s'écrivent dans ce cas:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

On retrouve ainsi le même résultat de ce système traité dans la partie 1 en utilisant le changement de variables.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)) \end{cases}$$

$$avec \quad A_{11} = \frac{A_1}{2} \qquad A_{12} = \frac{A_2}{2} \qquad A_{21} = \frac{A_1}{2} \qquad A_{22} = -\frac{A_2}{2}$$

Remarque :

On choisissant des conditions initiales bien particulières on peut provoquer l'oscillation en mode 1, en mode 2 Ou une superposition de deux harmoniques de pulsations différentes. Lorsque ces deux pulsations sont proches l'une de l'autre, on observe le phénomène de battement illustré dans la partie 1 de ce chapitre.