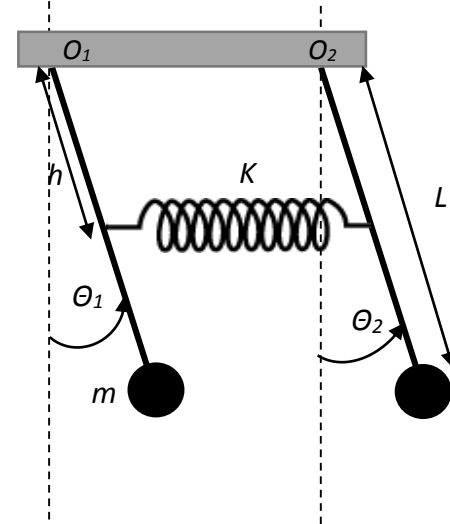


Pendules couplés (15 pt)

Deux pendules simples, de même longueur l , de même masse m , mobiles dans un même plan vertical, sont reliés par un ressort de raideur k à une distance h de l'extrémité; sa longueur est choisie de façon que les deux pendules soient verticaux à l'équilibre.



- 1) On supposant des oscillations de faible amplitude on trouve Que le Lagrangien du système est de la forme :

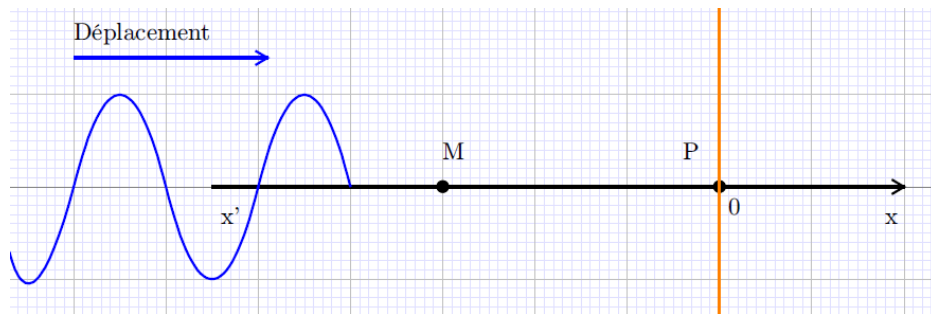
$$L = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(mgl + kh^2)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(mgl + kh^2)\theta_2^2 + kh^2\theta_1\theta_2$$

- a) A l'aide des équations de Lagrange ; trouver les équations de mouvement Pour les variables angulaires θ_1 et θ_2 .
 - b) Chercher les pulsations propres du système en fonction de h et déterminer la valeur H de h qui maximise les pulsations propres.
 - c) Trouver les modes propres puis les solutions générales du système
 - d) On se place dans le cas $h=H$. Chercher les rapports d'amplitude μ_1 et μ_2 et réécrire ensuite les solutions θ_1 et θ_2 .
- 2) On suppose dans un premier cas qu'à $t=0$: $\theta_1 = \theta_0$, $\theta_2 = \theta_0$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{\theta}_2 = 0$. Déterminer dans ce cas les solutions θ_1 et θ_2 .
 - 3) Commenter les oscillations dans ce cas et dessiner un graphiques ($\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$) pour illustrer vos propos.

Corde vibrante : Modes propres (5 pt)

Soit une onde progressive incidente, sinusoïdale d'amplitude A se propageant vers le point P. L'onde incidente provoque au point M la perturbation

$y_1(t) = A\sin(\omega t - kx)$ elle se propage dans le sens positif de l'axe $X'X$.



L'onde réfléchi au point **O**, provoque au point **M** la perturbation $y_2(t) = A\sin(\omega t + kx + \phi)$ qui se propage dans le sens négatif.

- 1) Ecrire l'onde résultante y en un point **M** quelconque. **Rappel** : $\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- 2) Le point P est fixe quel que soit t . Ecrire la condition au limite au point **P** ($x=0$) et en déduire Φ .
- 3) Simplifier encore la fonction y (**rappel** : $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$)
- 4) Il existe dans le milieu de propagation des points d'amplitude toujours nulle: ce sont les nœuds et des points toujours au maximum ce sont les ventres. Déterminer les positions des nœuds et des ventres en fonction de λ ; la longueur d'onde.