USTHB-Faculté de Physique **2ème année LMD - Géophysique** **Janvier 2016**
Examen du module « vibrations et Ondes » **Durée : 1h30**

Pendules couplés (15 pt)

$$L = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(mgl + kh^2)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(mgl + kh^2)\theta_2^2 + kh^2\theta_1\theta_2$$

a) Les équations de mouvement **(2)**

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + kh^2)\theta_1 - kh^2\theta_2 = 0 & (I) \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + kh^2)\theta_2 - kh^2\theta_1 = 0 & (II) \end{cases}$$

b) Les pulsations propres

Recherche des solutions de type **(0.5+0.5)**

$$\theta_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$\theta_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$$

Le déterminant **(1)**

$$\begin{vmatrix} -\omega^2ml^2 + mgl + kh^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & -\omega^2ml^2 + mgl + kh^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les pulsations propres **(0.5+0.5)**

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}}$$

La valeur H de h qui rend les pulsations maximale est H=l **(1)**

c) Les modes propres **(1)**

$$\cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad , \quad \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Les solutions générales **(0.5+0.5)**

$$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_1\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\theta_2(t) = A_2\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

d) Les rapports d'amplitude μ_1 et μ_2

- On obtient μ_1 on supposant que lorsque le système oscille en premier mode **(1)**

$$\omega = \omega_1 \quad => \quad \theta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad , \quad \theta_2(t) = A_2\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

En remplaçant dans les équations (I) et (II) on trouve

$$\mu_1 = \frac{A_2}{A_1} = 1$$

- On obtient μ_2 on supposant que lorsque le système oscille en deuxième mode **(1)**

$$\omega = \omega_1 \quad => \quad \theta_1(t) = B_1\cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad , \quad \theta_2(t) = B_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

En remplaçant dans les équations (I) et (II) on trouve

$$\mu_2 = \frac{B_2}{B_1} = -1$$

Les solutions Θ_1 et Θ_2 s'écrivent alors :

$$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_1\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\theta_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - B_1\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

USTHB-Faculté de Physique **2ème année LMD - Géophysique** **Janvier 2016**
Examen du module « vibrations et Ondes » **Durée : 1h30**

1) $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2 = 0$.

$A_1 \cos(\phi_1) + B_1 \cos(\phi_2) = \theta_0 \quad ---------(1)$

$A_2 \cos(\phi_1) - B_1 \cos(\phi_2) = \theta_0 \quad ---------(2)$

$\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 B_1 \sin(\phi_2) = 0 \quad ------(3)$

$\omega_1 A_2 \sin(\phi_1) - \omega_2 B_1 \sin(\phi_2) = 0 \quad ------(4)$

$(1)+(2)$: $A_1 \cos(\phi_1) = \dfrac{\theta_0}{2} \quad ------(5)$

$(1)-(2)$: $B_1 \cos(\phi_2) = \dfrac{\theta_0}{2} \quad ------(6)$

$(3)+(4)$: $A_1 \sin(\phi_1) = 0 \quad ------(7)$

$(3)-(4)$: $B_1 \sin(\phi_1) = 0 \quad ------(8)$

On fait : **(0.5+0.5+0.5+0.5)**

$(5)^2 + (7)^2$: $A_1 = \dfrac{\theta_0}{2}$ $de\ (7)\ \phi_1 = 0$

$(6)^2 + (8)^2$: $B_1 = 0$ $de\ (6)\ et\ (8)\ \phi_2\ est\ reèl\ quelconque$

Les solutions Θ_1 et Θ_2 s'écrivent alors :

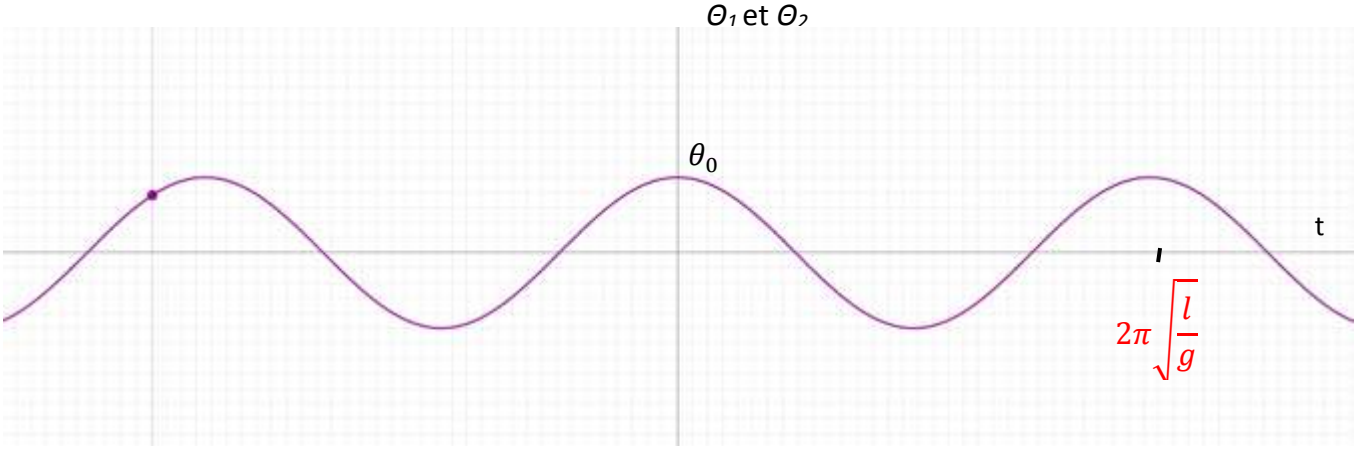
$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$\theta_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

2) Commentaire : **(2)**

On s'aperçoit que le deuxième mode est absent dans les deux solutions.

$\theta_1(t)\ et\ \theta_2(t)$ vibrent en phase au premier mode seulement.

Graphiques ($\theta_1(t)\ et\ \theta_2(t)$) : des cosinus simples.



Corde vibrante : Modes propres (5 pt)

1) $\boldsymbol{y(t)} = y_1 + y_2(t) = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx + \phi)$ **(1)**

$sachant\ que\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $on\ a\ y(t) = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(kx + \dfrac{\phi}{2}\right)$

2) Au point **P** (x=0) fixe.**(1)**

$$y(0) = A\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0 \; et \; ce \; quelque \; soit \; t$$

$$donc \; \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0 \quad ce \; qui \; donne \; \phi = \pi$$

3) Simplification **(1)**

Sachant que $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ $donc$ $y(t) = A\sin(\omega t)\sin(kx)$

4) (1+1)

Pour les nœuds : $y(x,t) = 0 \; quelque \; soit \; t \rightarrow \sin(kx) = 0 \rightarrow \; kx = n\pi \; \; d'ou \; x = \frac{n\lambda}{2}$

Les ventres : $y(x,t) = y_{max} \; quelque \; soit \; t \rightarrow \sin(kx) = 1 \rightarrow \; kx = (2n+1)\pi \; \; d'ou \; x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}$