Université des Sciences et de La Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Examen Final, le 23 Janvier 2022

Exercice 1 (05 points): Système libre à un degré de liberté

Soit une masse m=1 kg, reliée à l'extrémité d'une tige, de longueur L et de masse négligeable. On relie la tige par un amortisseur de constante d'amortissement α= 5 N.s/m et la masse m par un ressort de constante de raideur k=100N/m, comme le montre la figure 1.

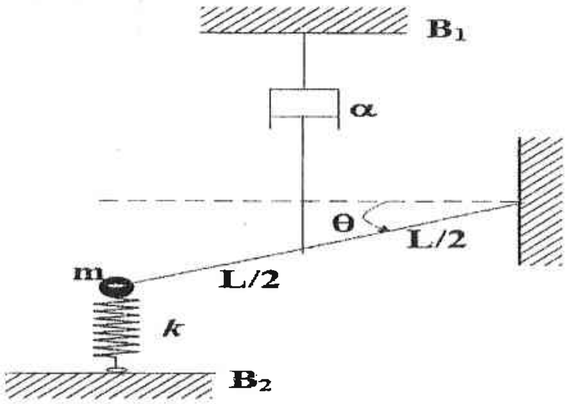


Figure 1

1°) Établir l'équation du mouvement en fonction de θ.

2°) Déterminer le facteur d'amortissement δ et la la pulsation propre du système ω_n.

3°)Déterminer la constante d'amortissement critique α_c.

Exercice 2 (05 points): Système forcé à un degré de liberté

On reprend le système précédent et on anime le Bâti B_1 d'un déplacement sinusoïdal $S(t)=S_0\sin(\Omega\, t)$

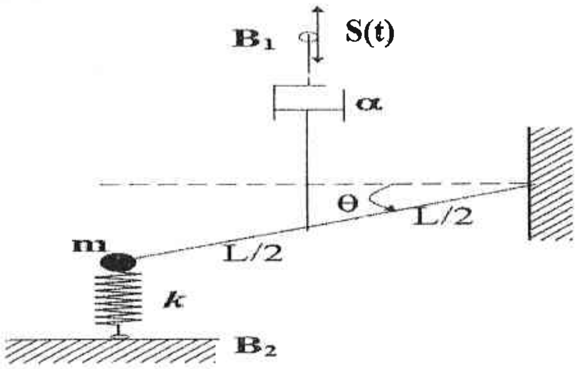


Figure 2

1°) Déterminer l' équation du mouvement.

2°) Déterminer la réponse du système.

3°) Déduire la solution en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase..

Exercice 3 (05 points): Système libre à deux degrés de liberté

Soit le système représenté par la figure 3

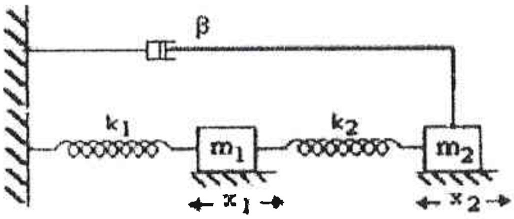


Figure 3

1°) Déterminer le lagrangien du système en fonction des coordonnées x_1 et x_2

2°) Déduire les équations du mouvement.

3°) Déterminer les pulsations propres du système lorsque β=0 , $m_1=m_2=m$ et $k_1=k_2=k$

Exercice 4 (05 points): Système forcé à deux degrés de liberté

On applique une force excitatrice comme indiqué dans la figure 4.

1°) Déterminer les équations du mouvement.

2°) Déterminer les équations différentielles électriques analogues en fonction des courants i_1 et i_2 puis déduire le schéma électrique équivalent.

3°) Déterminer les pulsations de résonance lorsque β=0, sachant que $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$, $m_1=m_2=m$ et $k_1=k_2=k$.

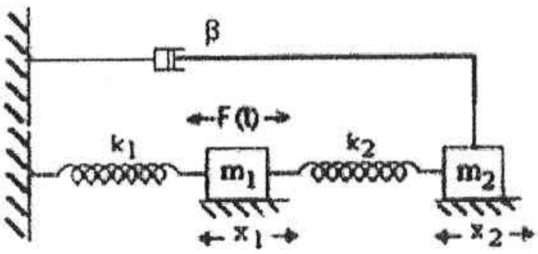


Figure 4

Université des Sciences et de La Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (VOM), Examen Final, le 23 Janvier 2022

Corrigé

Exercice 1

1°) $T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$, $U = \frac{1}{2}k(L\theta)^2$ et $D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{L}{2}\dot{\theta})^2$, $L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(L\theta)^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\theta = 0$ 2 points

2°) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10rd/s$ et $\delta = \frac{\alpha}{8m} = 0.625\ s^{-1}$ 1 point

3°) Amortissement critique $\Rightarrow \omega_n = \delta \Rightarrow = \alpha_c = 8\sqrt{k.m}$ =80 N.s/m 2 points

Exercice 2

1°) $D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{L}{2}\dot{\theta} - \dot{s})^2$ 0.5 point

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\theta = \frac{\alpha}{2mL}s_0\cos(\Omega t)$ 1.5 point

2°) $\theta(t) = \theta_0 e^{-0.625t}\cos(\omega_a t + \varphi) + A\cos(\Omega t + \phi)$ 1 point

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2} = 9.98\ rd/s$, $A = \frac{\frac{\alpha}{2mL}s_0}{\sqrt{(\omega_n^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}}$; $\tan(\phi) = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_n^2-\Omega^2}$ 1 point

3°) En régime permanent t→+∞:

$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$ avec $A = \frac{\frac{\alpha}{2mL}s_0}{\sqrt{(\omega_n^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}}$; $\tan(\phi) = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_n^2-\Omega^2}$ 1 point

Exercice 3

1°)$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$ 0.5 point

2°) $D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}_2^2$ 0.5 point

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + \beta\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$ 1 point

3°) Détermination des pulsations propres: on considère les solutions particulières

$x_1 = A\cos(\omega t + \phi)$, $x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$

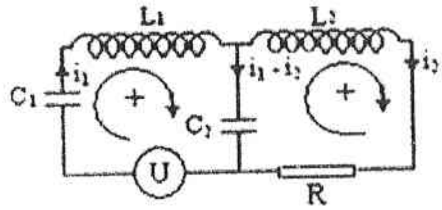
on obtient l'équation caractéristique: $\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 1 point

$\omega_1^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0^2$ et $\omega_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0^2$ 2 points

Exercice 4

1°) $D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}_2^2$ 0.5 point

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F \\ m_2\ddot{x}_2 + \beta\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$ 0.5 point



1 point

$$2°)\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int(i_1 - i_2)dt + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt = U(t) \\ L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 - \frac{1}{C_2}\int(i_1 - i_2)dt = 0 \end{cases}$$ 1 point

3°) $\omega_R^1 = \sqrt{\frac{k}{2m}(3 + \sqrt{5})}$ $\omega_R^2 = \sqrt{\frac{k}{2m}(3 - \sqrt{5})}$ 2 points