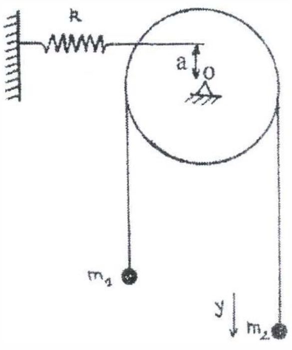
# Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
# Physique 3 (V O M)
# Examen Final, le 11 Janvier 2018

---

**Exercice n°1 (5 points) : Oscillations libres à un degré de liberté**

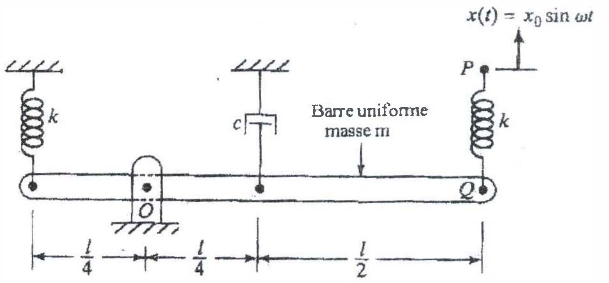



Le système de la figure ci-contre est constitué d'une poulie de rayon R et de moment d'inertie : $J_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Les deux masses $m_1$ et $m_2$ sont reliées par un fil inextensible. Un ressort de raideur k relie la poulie à un bâti fixe.

Ecrire pour le système :

1- Le Lagrangien,
2- L'équation du mouvement linéarisée au voisinage de la position d'équilibre stable (c'est-à-dire l'équation des petites oscillations).
3- La période des petites oscillations

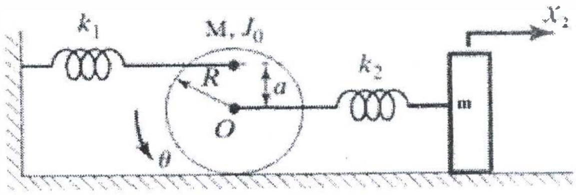
**Exercice n°2 (5 points) : Système à un degré de liberté soumis à un déplacement sinusoïdal**




Une barre uniforme de masse m pouvant pivoter autour du point O, est connectée à ses extrémités par deux ressorts de constante de raideur k. L'extrémité P du ressort PQ est soumise à un déplacement sinusoïdal $x(t)=x_0 \sin \omega t$ comme le montre la figure.

1- Ecrire l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et la fonction de dissipation
2- Trouver l'équation différentielle du mouvement
3- Donner le déplacement angulaire de la barre en régime permanent en précisant l'amplitude et le déphasage.

**Exercice n°3 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté**

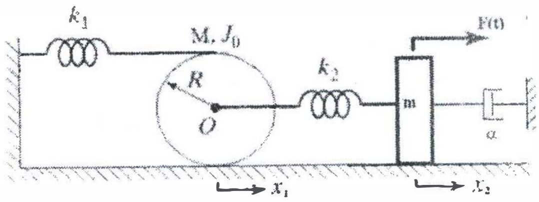



Le cylindre, représenté sur la figure ci-contre, de moment d'inertie $J_0 = \frac{MR^2}{2}$, peut rouler sans glisser sur un plan. Il est raccordé d'un côté à un bâti fixe par un ressort de raideur $k_1$ et de l'autre côté à la masse m par un ressort de raideur $k_2$.

On appelle $x_1 = R\theta$ le déplacement du centre de masse du cylindre par rapport à la position d'équilibre. Les mouvements sont considérés de faible amplitude.

1. Montrer que, dans le cas où $a = R$, $m = \frac{M}{2}$, $k_1 = 2k$ et $k_2 = k$, les équations du mouvement, en $x_1$ et $x_2$, peuvent s'écrire (on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$) sous la forme: $\begin{cases} \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \frac{\omega_0^2}{3} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$
2. Déterminer les pulsations propres du système en fonction de $\omega_0$
3. En déduire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

**Exercice n°4 (5 points) : Oscillations forcées à deux degrés de liberté**




Dans cet exercice, on considère que les frottements subis par l'ensemble du système mécanique sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α. Une force sinusoïdale, $F(t)= F_0\cos\Omega t$, est appliquée sur la masse m.

1. Etablir les équations du mouvement du système en $x_1$ et $x_2$.
2. Ecrire les équations aux vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ et déduire l'impédance d'entrée du système pour $\Omega = \omega_0$.
3. En utilisant l'analogie électromécanique force-tension, écrire les équations intégro-différentielles du circuit électrique analogue à ce système mécanique et représenter son schéma électrique.

# Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
## Physique 3 (V O M)
## Solution de l'Examen Final, le 11 Janvier 2018

---

**Exercice n°1 (5 points) : Oscillations libres à un degré de liberté**

1- $L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m_1R^2 + m_2R^2\right]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ka^2\theta^2$  0,5 par terme  **2 points**

2- $\frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ 0,5 $\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ 1 ; $\omega_0^2 = \frac{ka^2}{\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)R^2}$ 0,5  **2 points**

3- $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}{k}\frac{R}{A}}$  1 (si $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 0,5) $\omega$ faux  **1 point**

**Exercice n°2 (5 points) : Système à un degré de liberté soumis à un déplacement sinusoïdal**

1- $T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$ avec $J_0 = \frac{7m\ell^2}{48}$ 0,75 ; $V = \frac{1}{2}\left(\frac{k\ell^2}{16}\right)\theta^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{3\ell}{4}\theta - x\right)^2$ 0,75 ; $D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\ell}{4}\right)^2\dot{\theta}^2$ 0,5  **2 points**

2- $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$ 0,25 $\Rightarrow J_0\ddot{\theta} + \frac{\alpha\ell^2}{16}\dot{\theta} + \frac{10\ell^2}{16}k\theta = \frac{3\ell k}{4}x$ 0,75  **1 point**

Que l'on peut réécrire $\ddot{\theta} + \left(\frac{3\alpha}{7m}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{30k}{7m}\right)\theta = \frac{36k}{7m\ell}x(t)$

3- Le déplacement de la barre en régime permanent s'écrit :

$\theta(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))$ 1 avec $A(\omega) = \frac{36kx_0/7m\ell}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ 0,5 et $\varphi(\omega) = \text{Arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ où $\delta = \frac{3\alpha}{14m}$ 0,5  **2 points**

**Exercice n°3 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté**

L= T-U

$T = T_M + T_m = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$  0,5

$U = \frac{1}{2}k_1[(R+a)\theta]^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}k_1\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$ avec $x_1 = R\theta$  0,5

Dans le cas où: $a = R$ , $m = \frac{M}{2}$, $k_1 = 2k$ et $k_2 = k$

$L = \frac{1}{2}m(3\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(8x_1^2 + (x_2 - x_1)^2)$  **1 point**

les équations du mouvement du système:  0,25

0,25 $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$ 0,25 i.e $\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + 8kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \frac{\omega_0^2}{3}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases}$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 0,25  **1 point**

2. En supposant des solutions harmoniques: $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$, alors

$\begin{cases} (3\omega_0^2 - \omega^2)A - \frac{\omega_0^2}{3}B = 0 & (1) \\ -\omega_0^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 & (2) \end{cases}$ , le système d'équations admet des solutions non triviales telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ si le

déterminant $\begin{vmatrix} (3\omega_0^2 - \omega^2) & -\frac{\omega_0^2}{3} \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$. D'où $(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\omega_0^4}{3} = 0$  0,5

0,5

$$\text{d'où}\begin{cases}\omega_1 = \left[\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}\right]^{1/2}\omega_0 \approx 0.919\omega_0 & 0,5\\[2ex] \omega_2 = \left[\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}\right]^{1/2}\omega_0 \approx 1.776\omega_0 & 0,5\end{cases}$$

**2 points**

3. Les solutions générales : $\begin{cases}x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) & 0,5\\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) & 0,5\end{cases}$

**1 point**

**Exercice n°4 (5 points) : Oscillations forcées à deux degrés de liberté**

$$L = \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}k\left(8x_1^2+(x_2-x_1)^2\right) \quad 0,25 \qquad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2 \quad 0,25$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = F(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3m\ddot{x}_1 + 8kx_1 + k(x_1-x_2) = 0 & 0,25\\ m\ddot{x}_2 + k(x_2-x_1) + \alpha\dot{x}_2 = F(t) & 0,25\end{cases} \text{ d'où}$$

**1 point**

$$\begin{cases}\ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \dfrac{\omega_0^2}{3}x_2 = 0\\[2ex] \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_2 = \dfrac{F_0}{m}\cos\Omega t\end{cases}$$

$$\begin{cases}0,5 \quad 3m\dfrac{d\dot{x}_1}{dt} + 8k\int \dot{x}_1 dt + k\int(\dot{x}_1 - \dots) = 0\\ 0,5\end{cases}$$

2. En régime permanent les solutions du système d'équations II sont harmoniques. En utilisant les notations complexes:

$$\begin{cases}x_1(t) = \tilde{X}_1 e^{j\Omega t}\\ x_2(t) = \tilde{X}_2 e^{j\Omega t}\end{cases} \; 0,25 \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases}\dot{x}_1(t) = j\Omega.x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = j\Omega.x_1(t)\end{cases} \; 0,25$$

on obtient ainsi les équations aux vitesses:

$$\begin{cases}\left(3\omega_0^2-\Omega^2\right)\dot{x}_1 - \dfrac{\omega_0^2}{3}\dot{x}_2 = 0\\[2ex] \left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+j\Omega\dfrac{\alpha}{m}\right]\dot{x}_2 - \omega_0^2\dot{x}_1 = j\Omega\dfrac{F}{m}\end{cases} \quad \text{pour } \Omega=\omega_0 \quad \begin{cases}\left(2\omega_0^2\right)\dot{x}_1 - \dfrac{\omega_0^2}{3}\dot{x}_2 = 0 & 0,25\\[2ex] \left[j\omega_0\dfrac{\alpha}{m}\right]\dot{x}_2 - \omega_0^2\dot{x}_1 = j\omega_0\dfrac{F}{m} & 0,25\end{cases}$$

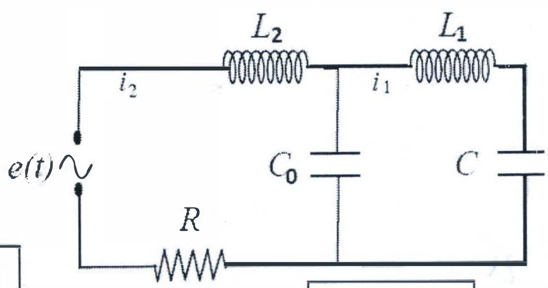
**1 point**

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \dfrac{\dot{x}_2}{6}\\[2ex] \left[j\dfrac{\alpha}{m} - \dfrac{\omega_0}{6}\right]\dot{x}_2 = j\dfrac{F}{m}\end{cases}$$

Ainsi $Z_m(\omega_0) = \dfrac{F(t)}{\dot{x}_2} = \alpha + j\dfrac{m\omega_0}{6}$

**1 point**

3. Analogie: $F(t) \Leftrightarrow e(t); \dot{x}(t) \Leftrightarrow i(t); m \Leftrightarrow L; \quad k \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} \quad \alpha \Leftrightarrow R$




$$\begin{cases}3m\ddot{x}_1 + 8kx_1 + k(x_1-x_2) = 0\\ m\ddot{x}_2 + k(x_2-x_1) + \alpha\dot{x}_2 = F(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}L_1\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{c}\int i_1 dt + \dfrac{1}{c_0}\int(i_1-i_2)dt = 0 & \Rightarrow \text{Maille 1}\\[2ex] L_2\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{c_0}\int(i_2-i_1)dt + Ri_2 = e(t) & \Rightarrow \text{Maille 2}\end{cases}$$

**1 point**

**1 point**