

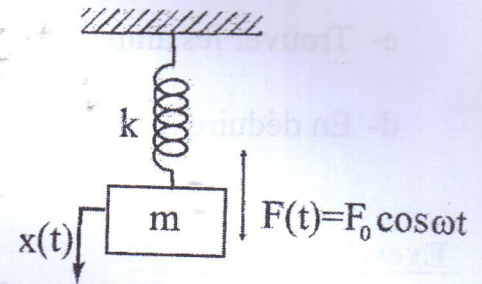
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Examen Final, le Dimanche 25 Mai 2014

Exercice 1 : 5 points

Système non-amorti soumis à une force d'excitation sinusoïdale

Soit un système masse-ressort avec $k=4000\text{N/m}$ et $m=10\text{ kg}$, la masse subit une force $F(t)=400 \cos(30t)\text{ N}$.

- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.
- Donner la solution complète de cette équation.
- Trouver la réponse totale du système avec les conditions initiales suivantes :
 - $x_0 = 0,1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0$
 - $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 10\text{ m/s}$
 - $x_0 = 0,1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 10\text{ m/s}$



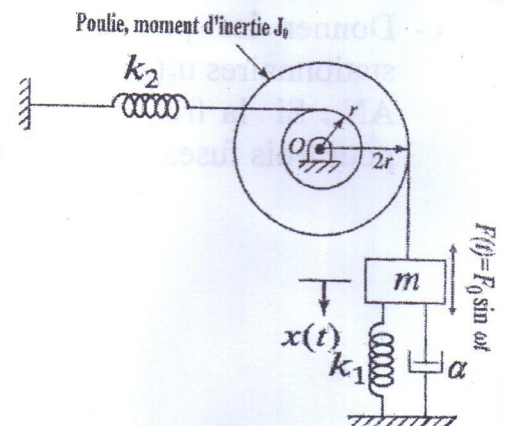
Exercice 2 : 5 points

Système masse-poulie-ressort-amortisseur à un degré de liberté forcé

- Ecrire les énergies cinétique et potentielle, le lagrangien et la fonction de dissipation.

- Montrez que l'équation du mouvement de la masse m

s'écrit :
$$\left(\frac{J_0}{2r} + 2mr \right) \ddot{x} + 2\alpha r \dot{x} + \left(2k_1 r + \frac{k_2 r}{2} \right) x = 2rF_0 \sin \omega t$$

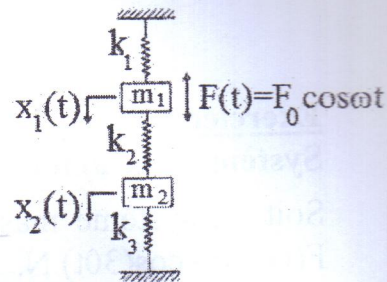


- En supposant que la réponse permanente est de la forme $x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)$, donnez l'amplitude X et le déphasage ϕ lorsque $k_1 = 1000\text{N/m}$, $k_2 = 500\text{N/m}$, $\alpha = 500\text{N-s/m}$, $m = 10\text{kg}$, $r = 5\text{cm}$, $J_0 = 1\text{kg-m}^2$, $F_0 = 50\text{N}$, $\omega = 20\text{rad/s}$.

Exercice 3 : 5 points

Réponse stationnaire d'un système masse-ressort à deux degrés de liberté

Soit le système masse-ressort à deux degrés de liberté dont la première masse m est excitée par une force de la forme $F(t) = F_0 \cos \omega t$.



- a- Ecrire les énergies cinétique et potentielle et le lagrangien.
- b- En déduire les équations du mouvement des deux masses.
On prendra $k_1=k_2=k_3$ et $m_1=m_2$.
- c- Trouver les amplitudes de déplacement des deux masses.
- d- En déduire les pulsations de résonance et la pulsation d'antirésonance.

Exercice 4 : 5 points

Vibrations libres d'une corde quand les deux extrémités sont fixes

L'équation d'ondes à une dimension : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Peut être résolue par la méthode de séparation des variables, en posant : $u(x,t) = U(x)T(t)$.

- a- En utilisant la pulsation des vibrations ω , donner les deux équations différentielles auxquelles obéissent les fonctions $U(x)$ et $T(t)$.

- b- Montrer que pour une corde fixée aux deux extrémités de longueur ℓ , la solution générale est donnée par la superposition de tous les modes normaux $u_n(x,t)$ tels que

$$u_n(x,t) = U_n(x)T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi t}{\ell} \right].$$

- c- Donner les périodes spatiales λ_n et les fréquences temporelles f_n des ondes stationnaires $u_n(x,t)$.

AN : Si la fréquence est voisine de $f_2=19\text{Hz}$ pour deux fuseaux et de $f_3=28,5\text{Hz}$ pour trois fuseaux, quelle est la fréquence du fondamental et de f_5 ?

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M), Solution de l'Examen Final, du Dimanche 25 Mai 2014

Exercice 1 : 5 points

a- Equation différentielle du mouvement : $m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

1 point

b- Solution complète de l'équation différentielle :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t$$

1 point

c- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1,5 > 1$

1- $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow x(t) = 0,08 \cos 20t + 0,5 \sin 20t - 0,08 \cos 30t$

2- $x_0 = 0,1 \text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0,18 \cos 20t - 0,08 \cos 30t$

3- $x_0 = 0,1 \text{ m}$; $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow x(t) = 0,18 \cos 20t + 0,5 \sin 20t - 0,08 \cos 30t$

3 points

Exercice 2 : 5 points

a- Les énergies cinétique et potentielle s'écrivent : $T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \left[\frac{1}{8r^2} J_0 + \frac{1}{2} m \right] \dot{x}^2$

$$V = \frac{1}{2} k_2 (r\theta)^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 = \left(\frac{k_2}{8} + \frac{k_1}{2} \right) x^2 \text{ où on a pris } \theta = \frac{x}{2r}$$

D'où le Lagrangien : $L = T - V = \left[\frac{1}{8r^2} J_0 + \frac{1}{2} m \right] \dot{x}^2 - \left(\frac{k_2}{8} + \frac{k_1}{2} \right) x^2$

La fonction de dissipation est : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

1 point

b- L'équation de Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_0 \sin \omega t - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

Donne $2 \left[\frac{1}{8r^2} J_0 + \frac{1}{2} m \right] \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \left(k_1 + \frac{k_2}{4} \right) x = F_0 \sin \omega t$

en multipliant par $2r$ on trouve $\left[\frac{J_0}{2r} + 2mr \right] \ddot{x} + 2\alpha r \dot{x} + \left(2k_1 r + \frac{1}{2} k_2 r \right) x = 2r F_0 \sin \omega t$

1 point

c- L'équation devient : $11\ddot{x} + 50\dot{x} + 112,5x = 5 \sin 20t$ lorsque $x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$, on trouve : pour une équation de la forme $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

$$X = \frac{F_0}{\left[(k - m\omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad \phi = \arctg \left(\frac{\alpha \omega}{k - m\omega^2} \right)$$

Soit : $X = \frac{5}{\left[\{112,5 - 11(20^2)\}^2 + \{50(20)\}^2 \right]^{1/2}} = 0,001136 \text{ m}$ et

$$\phi = \arctg \left(\frac{50(20)}{112,5 - 11(20)^2} \right) = -0,229 \text{ Rad} = -13,13^\circ$$

3 points

Exercice 3 : 5 points

a- $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$; $V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_1^2 - \frac{1}{2} (k_2 + k_3) x_2^2 + k_2 x_1 x_2$$

1 point

b- $m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \cos \omega t$ $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$

1 point

c-
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix}}; X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix}}$$

$$X_1 = \frac{(-m\omega^2 + 2k)F_0}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}; X_2 = \frac{kF_0}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

2 points

d- Les pulsations de résonance : $\omega_1 = \sqrt{k/m}$; $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$
La pulsation d'antirésonance : $\omega_{ar} = \sqrt{2k/m}$

1 point

Exercice 4 : 5 points

a- $u(x,t) = U(x)T(t)$, en substituant dans l'équation d'onde : $\frac{v^2}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$ puisque le membre de gauche dépend de x seulement et le membre de droite de t seulement leur valeur commune doit être une constante que l'on prend comme égale à $(-\omega^2)$.

Les fonctions $U(x)$ et $T(t)$ obéissent aux équations : $\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} U = 0$ et $\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$

1 point

b- Les solutions de ces équations sont : $U(x) = A \cos \frac{\omega x}{v} + B \sin \frac{\omega x}{v}$; $T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$

Les conditions $U(0) = U(\ell) = 0$ donnent $A = 0$ et $B \sin \frac{\omega \ell}{v} = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{nv\pi}{\ell}$, pour $n=1,2,\dots$

La solution $U_n(x,t)$ correspondant à ω_n s'écrit :

$$u_n(x,t) = U_n(x)T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{nv\pi t}{\ell} + D_n \sin \frac{nv\pi t}{\ell} \right]$$

$u_n(x,t)$ est le $n^{\text{ième}}$ mode de vibration.

La solution générale est donnée par la superposition de tous les $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{nv\pi t}{\ell} + D_n \sin \frac{nv\pi t}{\ell} \right]$$

3 points

c- $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$ et $f_n = \frac{nv}{2\ell}$

$$f_1 = \frac{f_2}{2} = \frac{f_3}{3} = \frac{f_5}{5} \approx 9,5 \text{ Hz} \quad f_5 = 47,5 \text{ Hz}$$

1 point