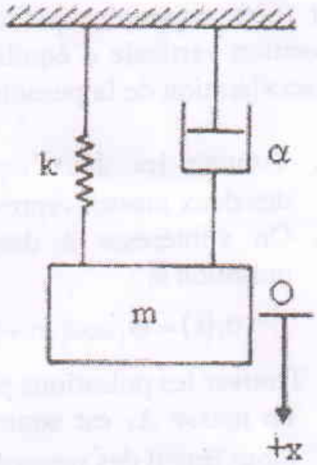
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Examen Final, le 27 Mai 2015

Exercice N° 1 (5 points): Oscillations libres avec amortissement visqueux

On considère le système de la figure composé d'une masse de valeur m, d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de constante d'amortissement α.



1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse en fonction de la coordonnée x(t).

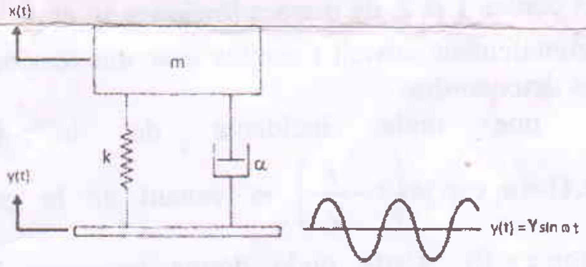
2- On définit le facteur d'amortissement $\delta = \alpha/2m$ et la pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Montrer que dans le cas de l'amortissement pseudopériodique, le déplacement de la masse m peut s'écrire :

$$x(t) = e^{-\delta t}\left\{x_0 \cos\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\, t + \frac{\dot{x}_0+\delta x_0}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \sin\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\, t\right\}$$

Où $x_0 = x(t=0)$ et $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0)$

3- on définit le décrément logarithmique D comme le rapport entre deux amplitudes successives d'un mouvement libre amorti pseudopériodique. Montrer que pour des petits amortissements $(\delta/\omega_0 \ll 1)$, on a $D = 2\pi\delta/\omega_0$.

Exercice N°2 (5 points) : Véhicule roulant sur une route ondulée



Soit le modèle simplifié d'un véhicule qui peut vibrer dans la direction verticale dans son déplacement sur une route ondulée. Le véhicule a une masse de 1200 kg. Son système de suspension a une constante de raideur de 400KN/m et un rapport d'amortissement $\delta/\omega_0=0{,}5$ où δ est le facteur d'amortissement et où ω_0 est la pulsation propre du système. La vitesse du véhicule est de 100 km/h et la surface de la route varie de manière sinusoïdale avec une amplitude Y=0,05 m et une longueur d'onde de 6 m.

1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement d'un système amorti soumis à un mouvement sinusoïdale de la base $y(t)=Y \sin \omega t$.

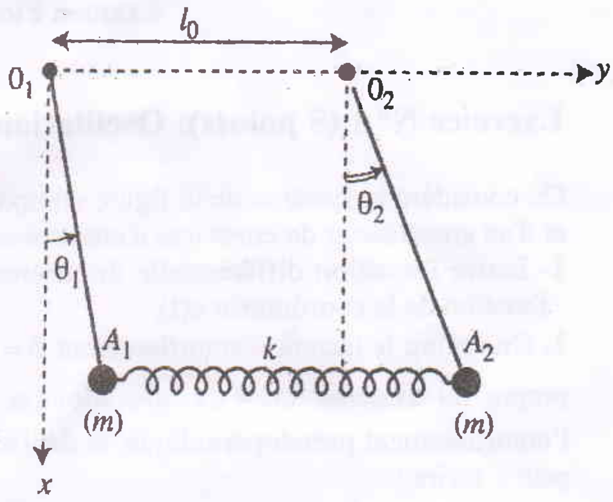
2- Calculer l'amplitude du déplacement du véhicule X en sachant que la solution particulière de l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{Y\sqrt{k^2+(\alpha\omega)^2}}{\left[(k-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2\right]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi)$$

3- Calculer la valeur maximale de la force transmise au véhicule.

Exercice N°3 (5 points) : Couplages de deux pendules simples

Deux pendules identiques O_1A_1 et O_2A_2, de masse m et de longueur ℓ, sont couplés par un ressort horizontal de raideur k qui relie les deux masses A_1 et A_2. A l'équilibre, le ressort horizontal est à sa longueur naturelle ℓ_0 ($\ell_0=O_1O_2$). Les deux pendules sont repérés à l'instant t par leurs élongations angulaires $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, supposées petites, par rapport à leur position verticale d'équilibre. On désigne par g l'accélération de la pesanteur.



1. Trouver les deux équations différentielles des deux masses représentées par θ_1 et θ_2.
2. On s'intéresse à des solutions de même pulsation ω :

$$\theta_1(t)=\Theta_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad \text{et} \quad \theta_2(t)=\Theta_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

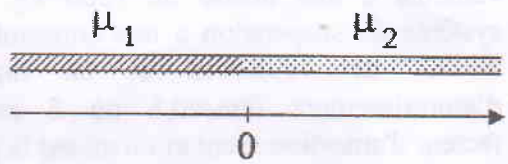
Trouver les pulsations propres du mouvement des deux masses.

3. La masse A_1 est soumise à une force excitatrice $F_e=F_M\cos\omega t$. Ecrire les équations du mouvement des masses A_1 et A_2 à l'aide des vitesses complexes $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ en régime forcé.

Exercice N°4 (5 points) : Coefficients de transmission et de réflexion à la jonction d'une corde

Deux cordes 1 et 2, de masses linéiques μ_1 et μ_2, sont soudées à la jonction O et sont tendues horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension T. On choisit l'abscisse $x=0$ à la jonction O des deux cordes.

Soit une onde incidente de la forme $y_i(x,t)=a_i\exp j\omega\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$ et venant de la gauche (région $x<0$). Cette onde donne naissance, à la jonction O à une onde réfléchie $y_r(x,t)$ dans la région des $x<0$ et une onde transmise $y_t(x,t)$ dans la région des $x>0$.



1- Ecrire les expressions des ondes $y_r(x,t)$ pour la région des $x<0$ et $y_t(x,t)$ pour la région des $x>0$.

2- Ecrire les deux équations de continuité au niveau de la jonction O pour le déplacement et pour la tension transversale.

3- En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission t en déplacement en fonction de $\alpha=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Physique 3 (V O M)

Solution de l'examen final du 27 Mai 2015

Exercice N° 1 (5 points): Oscillations libres avec amortissement visqueux

1- L'équation différentielle du mouvement de la masse s'écrit : $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$

que l'on sous la forme : $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 1 point

2- L'équation caractéristique $r^2+2\delta r+\omega_0^2=0$ a pour racines $r_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$

l'amortissement est pseudopériodique, $\delta<\omega_0$

La solution générale de l'équation est donnée par :

$$x(t)=e^{-\delta t}\left\{C_1\cos\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t+C_2\sin\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right\}$$

Avec les conditions initiales $x(t=0)=x_0$; $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$

On trouve $C_1=x_0$, $C_2=\dfrac{\dot{x}_0+\delta x_0}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$

Ce qui donne :

$$x(t)=e^{-\delta t}\left\{x_0\cos\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t+\frac{\dot{x}_0+\delta x_0}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right\}$$

2 points

3- Le facteur $e^{-\delta t}$ traduit une diminution exponentielle de l'amplitude des vibrations.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{e^{-\delta t_1}}{e^{-\delta(t_1+T)}}=e^{\delta T} \qquad D=\ln\frac{x_1}{x_2}=\delta T=\delta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}=\frac{2\pi\dfrac{\delta}{\omega_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$$

Pour des petits amortissements, $\delta/\omega_0 \ll 1 \Rightarrow D=2\pi\delta/\omega_0$. 2 points

Exercice N°2 :

1- L'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{x}+\alpha(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$

Si $y(t) = Y\sin\omega t$, on obtient : $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=ky+\alpha\dot{y}=kY\sin\omega t+\alpha\omega Y\cos\omega t$

1 point

2- Nous avons : $\omega=2\pi f=2\pi\left(\dfrac{100\times1000}{3600}\right)\dfrac{1}{6}=29{,}0887\,\text{rad/sec}$; $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\left(\dfrac{400\times1000}{1200}\right)^{1/2}=18{,}2574\,\text{rad/sec}$

On définit le rapport des fréquences r : $r=\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{29{,}0887}{18{,}2574}=1{,}5933$ $\qquad \dfrac{X}{Y}=\left[\dfrac{k^2+(\alpha\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}\right]^{1/2}$

En utilisant les définitions de $r=\omega/\omega_0$ et de $\zeta=\delta/\omega_0$, on trouve :

2 points

$$\frac{X}{Y}=\left\{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{1+(2\times0{,}5\times1{,}5933)^2}{(1-1{,}5933^2)^2+(2\times0{,}5\times1{,}5933)^2}\right\}^{1/2}=0{,}8493 \quad ; \quad X=0{,}8493\,Y=0{,}8493\times0{,}05=0{,}0425\,\text{m}$$

3- La force transmise à la masse m est calculée à partir de l'équilibre des forces :

$$F=k(x-y)+\alpha(\dot{x}-\dot{y})=-m\ddot{x}=m\omega^2X\sin(\omega t-\phi)=F_T\sin(\omega t-\phi)$$

où $F_T=m\omega^2X$ est l'amplitude ou la valeur maximale de la force transmise.

$$F_T=1200\times29{,}0887^2\times0{,}0425=43154\ \text{N}$$

2 points

Exercice 3 :

1- Les énergies cinétiques et potentielles des deux masses sont :

$$T=\frac{1}{2}m\ell^2\theta_1^2+\frac{1}{2}m\ell^2\theta_2^2 \quad ; \quad V=mg\ell(1-\cos\theta_1)+mg\ell(1-\cos\theta_2)+\frac{1}{2}k(\ell\theta_2-\ell\theta_1)^2$$

Le Lagrangien pour les petites oscillations s'écrit :

$$L=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta_2^2+\frac{mg\ell}{2}\theta_1^2+\frac{mg\ell}{2}\theta_2^2-\frac{1}{2}k\ell^2(\theta_2-\theta_1)^2=\frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+\frac{g}{\ell}\theta_1^2+\frac{g}{\ell}\theta_2^2-\frac{k}{m}(\theta_2-\theta_1)^2\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0\ (i=1,2) \quad \text{nous donne :} \quad \begin{cases}\ddot\theta_1+\frac{g}{\ell}\theta_1-\frac{k}{m}(\theta_2-\theta_1)=0\\ \ddot\theta_2+\frac{g}{\ell}\theta_2+\frac{k}{m}(\theta_2-\theta_1)=0\end{cases}$$

que l'on peut écrire $\quad \ddot\theta_1+\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\theta_1-\frac{k}{m}\theta_2=0 \ ; \ \ddot\theta_2+\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\theta_2-\frac{k}{m}\theta_1=0$ 2 points

2- Si on s'intéresse à des solutions de même pulsation ω et de même phase φ :

$$\theta_1=\Theta_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad \text{et} \quad \theta_2=\Theta_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

on obtient : $$\begin{cases}\left(-\omega^2+\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\theta_1 & -\frac{k}{m}\theta_2=0\\ -\frac{k}{m} & +\left(-\omega^2+\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\theta_2=0\end{cases}$$

Ce système admet une solution autre que $\theta_1=\theta_2=0$ si le déterminant des coefficients de θ_1 et θ_2 est égal à zéro, soit : $\left(-\omega^2+\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)^2-\frac{k^2}{m^2}=0$

Les pulsations propres ω' et ω'' sont donc solutions de l'équation $-\omega^2+\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}=\pm\frac{k}{m}$

soit : $\omega'=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $\omega''=\sqrt{\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}}$ 2 points

3- Les équations couplées à l'aide des coordonnées complexes $\bar\theta_1$ et $\bar\theta_2$ s'écrivent :

$$\ddot{\bar\theta}_1+\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\bar\theta_1-\frac{k}{m}\bar\theta_2=\frac{f_M}{m}e^{j\omega t} \quad ; \quad \ddot{\bar\theta}_2+\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)\bar\theta_2-\frac{k}{m}\bar\theta_1=0$$

Les équations du mouvement à l'aide des vitesses complexes $\bar V_1$ et $\bar V_2$ sont :

$$\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}-\omega_2\right)\bar V_1-\frac{k}{m}\bar V_2=j\omega\frac{F_M}{m}e^{j\omega t} \quad ; \quad \left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}-\omega_2\right)\bar V_2-\frac{k}{m}\bar V_1=0$$ 1 point

Exercice 4 :

1- L'onde incidente donnera une onde réfléchie et une onde transmise :

$$y_r=r\,a_i\exp j\omega\left(t+\frac{x}{v_1}\right) \quad ; \quad y_t=t\,a_i\exp j\omega\left(t-k_2\frac{x}{v_2}\right)$$ 1 point

2- Continuité de la déformation : $y_i(0,t)+y_r(0,t)=y_t(0,t)$

Continuité de la tension en x=0, c'est à dire de l'angle $\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}$ avec l'axe ox.

$$\frac{\partial y_i}{\partial x}(0,t)+\frac{\partial y_r}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial y_t(0,t)}{\partial x}$$ 2 points

3- On pose $y_i(x,t)=a_i\exp j\omega\left(t-\frac{x}{v_1}\right)=f\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$

En utilisant f' comme la dérivée de f par rapport à $t\pm\frac{x}{v_0}$ on peut écrire $\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)=f'$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\pm\frac{1}{v_i}f'$

En simplifiant par f', on trouve : $\left.\begin{matrix}1+r=t\\ -\frac{1}{v_1}+\frac{r}{v_1}=\frac{-t}{v_2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow r=\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}$ et $t=\frac{2v_2}{v_1+v_2}$

on définit : $\alpha=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$ avec $v_i=\sqrt{\frac{T}{\mu_i}}$; On trouve : $r=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ et $t=\frac{2}{1+\alpha}$ 2 points