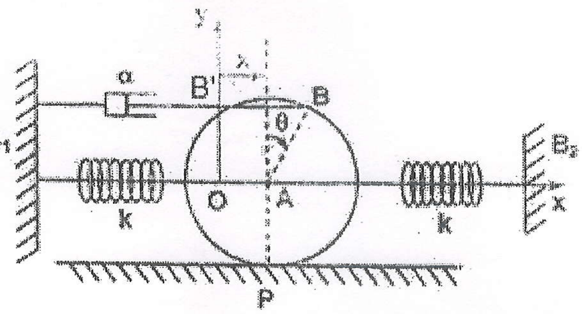
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Examen Final, le 12 Septembre 2019

Exercice n°1 (05 points): Décrément logarithmique d'un cylindre

Un cylindre plein et homogène, de masse M et de rayon R, est relié à un bâti B1 par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α tel que représenté sur la figure. Il est également relié à un deuxième bâti B2 par un ressort de même raideur k que le premier.

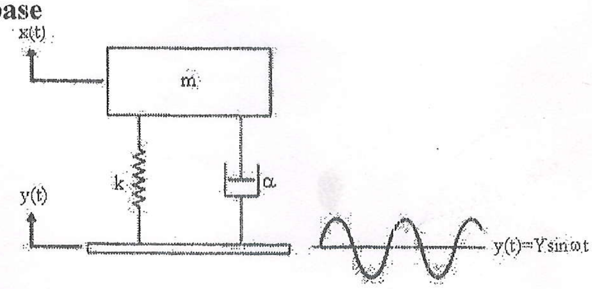
Le cylindre peut rouler sans glisser sur le plan P horizontal et son mouvement est repéré par le déplacement x de son centre de masse par rapport à la position d'équilibre. A cette position, les deux ressorts n'étant pas déformés, le point A est en O et le point B en B'.



1. Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système, ainsi que la fonction de dissipation. En déduire l'équation différentielle du mouvement repéré par la coordonnée x.
2. Donner la condition sur le coefficient de viscosité pour que le mouvement soit pseudopériodique. Cette condition étant vérifiée donner l'expression de la solution x(t).
3. Sachant que l'amplitude des oscillations diminue de moitié au bout d'un temps $\Delta t = 2$ s correspondant à dix pseudo-périodes. Calculer les valeurs numériques de k et de α. On donne M=1kg.

Exercice n°2 (5 points) : Réponse à une excitation harmonique de la base

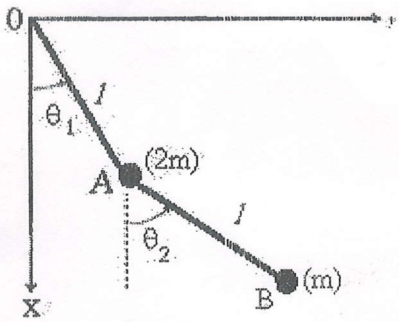
Soit un système à un degré de liberté avec amortissement visqueux de constante α. Ce système est soumis à une excitation harmonique de sa base $y(t) = Y\sin\omega t$, comme le montre la figure. Pour les données suivantes : m=10kg, α=20N.m/s, k=4000N/m, y(t)=0,05sin(5t) m.



1. Montrer que l'équation du mouvement du système est donnée par : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kY\sin\omega t + \alpha\omega Y\cos\omega t$
2. En utilisant les données et le principe de superposition, donner la réponse permanente de la masse $x_p(t)$ sous la forme $x_p(t) = X_1\sin(\omega t + \phi) + X_2\cos(\omega t + \phi)$.
3. Ecrire la solution permanente sous la forme $x_p(t) = X\cos(\omega t + \phi + \theta)$. Calculer le rapport des amplitudes X/Y de la réponse permanente à celle du mouvement de la base y(t), (ne pas calculer θ).

Exercice n°3 (5 points) : Pendule double portant des masses différentes

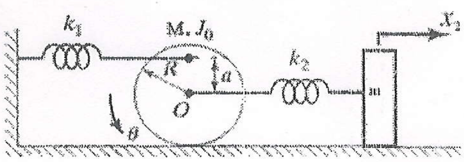
Un pendule double est libre d'osciller dans le plan vertical oxy. Les tiges sont de masse négligeable et de même longueur. Elles portent les masses 2m et m. On désignera par $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les angles respectifs que font les tiges avec la verticale descendante Ox, à l'instant t. On suppose que ce pendule double n'est soumis qu'à de petites oscillations.



1. Etablir les deux équations du mouvement de second ordre en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. On donne : $v_A^2 = \ell^2\dot{\theta}_1^2$; $v_B^2 = \ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right]$
2. Exprimer en fonction de $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ les pulsations propres ω_1 et ω_2 des petits mouvements de ce pendule double.
3. Déterminer les rapports des amplitudes correspondants à ces pulsations propres.

Exercice n°4 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté

Le cylindre, représenté sur la figure ci-contre, de moment d'inertie$J_0 = MR^2/2$, peut rouler sans glisser sur un plan. Il est raccordé d'un côté à un bâti fixe par un ressort de raideur k_1 et de l'autre côté à la masse m par un ressort de raideur k_2.
On appelle $x_1 = R\theta$ le déplacement du centre de masse du cylindre par rapport à la position d'équilibre. Les mouvements sont considérés de faible amplitude.



1. Montrer que, dans le cas où $a = R$, $m = M/2$, $k_1 = 2k$ et $k_2 = k$, les équations du mouvement, en x_1 et x_2, peuvent s'écrire (on pose $\omega_0^2 = k/m$) sous la forme : $\ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \frac{\omega_0^2}{3}x_2 = 0$, $\ddot{x}_2 + 3\omega_0^2 x_2 - \frac{\omega_0^2}{3}x_1 = 0$
2. Déterminer les pulsations propres du système en fonction de ω_0
3. En déduire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M)
Solution de l'Examen Final du 12 Septembre 2019

Exercice n°1 (05 points): Décrément logarithmique d'un cylindre

1. $T=\frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}^2$, $U=\frac{1}{2}(2k)x^2$, $D=\frac{1}{2}(4\alpha)\dot{x}^2$ **2 points**

$$L=T-U,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}M\ddot{x}+4\alpha\dot{x}+2kx=0$$

2. $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$, $\delta=\frac{4\alpha}{3M}$ et $\omega_0^2=\frac{4k}{3M}$, $\delta<\omega_0 \ \Rightarrow\ \alpha<\frac{\sqrt{3Mk}}{2}$ **1 point**

$$x(t)=A\exp(-\delta t)\cos(\omega_a t+\phi)\ \text{avec}\ \omega_a=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

3. $T_a\frac{\Delta t}{10}=0{,}2s$ $\quad \Delta=\frac{Log(2)}{10}\approx 0{,}07 \qquad \Delta=\delta T_a=\left(\frac{4\alpha}{3M}\right)T_a \ \Rightarrow\ \alpha=\frac{3M\Delta}{4T_a}\approx 0{,}26\text{kg/s}$

$\omega_0^2=\omega_a^2+\delta^2 \ \Rightarrow\ \frac{4k}{3M}=\frac{4\pi^2}{T_a^2}+\frac{\Delta^2}{T_a^2}\ \Rightarrow\ k=\frac{3M}{4}\left(\frac{4\pi^2+\Delta^2}{T_a^2}\right)\approx 740\text{N/m}$ **2 points**

ou bien $\quad \delta=0{,}35s^{-1},\ \omega_a=31{,}4rad/s\ \Rightarrow\ \delta<<\omega_0 \quad et\ k=\frac{3M}{4}\omega_0^2\approx 740N/m$

Exercice n°2 (5 points) : Réponse à une excitation harmonique de la base

1. $m\ddot{x}+\alpha(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$, $y(t)=Y\sin\omega t$; $\dot{y}(t)=\omega Y\cos\omega t$ D'où : $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=kY\sin\omega t+\alpha\omega Y\cos\omega t$

(1 point)

2. $F_1(t)=kY\sin\omega t \ \Rightarrow\ x_1(t)=\frac{kY/m\sin(\omega t+\varphi)}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}$; $\varphi=-\text{arctg}\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$

$$F_2(t)=\alpha\omega Y\cos\omega t\ \Rightarrow\ x_2(t)=\frac{\alpha\omega Y/m\cos(\omega t+\phi)}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]^{1/2}}\ ,\ x_p(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

$$x_p(t)=\frac{kY/m}{\sqrt{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}}\sin(\omega t+\varphi)+\frac{\alpha\omega Y/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi)\ avec\ \varphi=-arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$ **(1 point)**

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=20\,rad/s,\ \frac{kY}{m}=20$; $\frac{\alpha\omega Y}{m}=0{,}5$, $[(\omega_0^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2]^{1/2}=375{,}13,\varphi=-arctg(0{,}0266)\ \Rightarrow\ \varphi\approx -0{,}0266$

$$x_p(t)=0{,}00133\cos(5t-0{,}0266)+0{,}0533\sin(5t-0{,}0266)$$ **(1 point)**

3. $x_p(t)=\frac{kY/m}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}\sin(\omega t+\varphi)+\frac{\alpha\omega Y/m}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t+\varphi)$

$$\boxed{x_p(t)=X\cos(\omega t+\phi+\theta)=Y\left[\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2+\left(\frac{\alpha\omega}{m}\right)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}\right]^{1/2}\cos(\omega t+\phi+\theta)}$$ **(1 point)**

A.N : $\boxed{\frac{X}{Y}=\frac{(400^2+100)^{1/2}}{375{,}13}=1{,}066}$ **(1 point)**

Exercice n°3 (5 points) : Pendule double portant des masses différentes

1. Energies cinétiques, potentielle et Lagrangien :

$$T=\frac{1}{2}(2m)v_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2\ ;\ v_A^2=\ell^2\dot{\theta}_1^2\ ;\ v_B^2=\ell^2\left[\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\right]$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m\ell^2\left[3\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\right];\ V=-mg\ell(3\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

$$L=\frac{1}{2}m\ell^2\left[3\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)\right]+mg\ell(3\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

pour les petites oscillations : $L=\frac{1}{2}m\ell^2\left[3\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]-\frac{mg\ell}{2}(3\theta_1^2+\theta_2^2)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}-\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\ \text{donne}\ \begin{cases}\frac{1}{2}m\ell^2\left[6\ddot{\theta}_1+2\ddot{\theta}_2\right]+\frac{mg\ell}{2}(6\theta_1)=0\\ \frac{1}{2}m\ell^2\left[2\ddot{\theta}_2+2\ddot{\theta}_1\right]+\frac{mg\ell}{2}(2\theta_2)=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \boxed{\begin{cases}3\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+3\omega_0^2\theta_1=0\\ \ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_2=0\end{cases}}$$ **(2 points)**

2. En supposant des solutions de la forme $\theta_1(t)=\Theta_1\cos\omega t+\varphi$; $\theta_2(t)=\Theta_2\cos\omega t+\varphi$

On obtient : $\begin{cases}3(\omega_0^2-\omega^2)\Theta_1-\omega^2\Theta_2=0\\-\omega^2\Theta_1+(\omega_0^2-\omega^2)\Theta_2=0\end{cases}$

Pour que le système admette des solutions Θ_1 et Θ_2 différentes de zéro, il faut que le déterminant des coefficients soit nul :

$$\begin{vmatrix}3(\omega_0^2-\omega^2) & -\omega^2\\ -\omega^2 & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega^4=0\Rightarrow(\omega^2-\sqrt{3}\omega_0^2+\sqrt{3}\omega^2)(\omega^2+\sqrt{3}\omega_0^2-\sqrt{3}\omega^2)=0$$

$$\Rightarrow[(1+\sqrt{3})\omega^2-\sqrt{3}\omega_0^2][(1-\sqrt{3})\omega^2+\sqrt{3}\omega_0^2]=0\Rightarrow\omega_1^2=\frac{\sqrt{3}\omega_0^2}{1+\sqrt{3}}\ ;\ \omega_2^2=\frac{\sqrt{3}\omega_0^2}{\sqrt{3}-1}$$

(2 points)

$$\boxed{\Rightarrow\omega_1=\omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}=0{,}796\omega_0\quad\text{et}\quad\omega_2=\omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}=1{,}538\omega_0}$$

3. $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}=\frac{3(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega^2}=\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$

(1 point)

$$\boxed{\omega=\omega_1,\quad\frac{\Theta_2}{\Theta_1}=\frac{3(\omega_0^2)(1-0{,}796^2)}{0{,}796^2\omega_0^2}=1{,}732\ ;\ \omega=\omega_2,\quad\frac{\Theta_2}{\Theta_1}=\frac{3(\omega_0^2)[1-1{,}538^2]}{1{,}538^2\omega_0^2}=-0{,}577}$$

Dans le premier cas, les masses vibrent en phase, dans le deuxième, elles vibrent en opposition de phase.

Solution de l'exercice n°4 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté

1- L= T-U , $T=T_M+T_m=\left[\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2\right]+\left[\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}\right)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

$U=\frac{1}{2}k_1[(R+a)\theta]^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2=\frac{1}{2}k_1\left(1+\frac{a}{R}\right)^2x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2$ avec $x_1=R\theta$

1 point

Dans le cas où: $a=R$, $m=\frac{M}{2}$, $k_1=2k$ et $k_2=k$

$L=\frac{1}{2}m(3\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}k(8x_1^2+(x_2-x_1)^2)$

les équations du mouvement du système :

$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases}$ i.e $\begin{cases}3m\ddot{x}_1+8kx_1+k(x_1-x_2)=0\\m\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}\ddot{x}_1+3\omega_0^2x_1-\frac{\omega_0^2}{3}x_2=0\\\ddot{x}_2+\omega_0^2x_2-\omega_0^2x_1=0\end{cases}$ avec $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

1 point

2. En supposant des solutions harmoniques : $x_1(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ et $x_2(t)=B\cos(\omega t+\varphi)$, alors

$\begin{cases}(3\omega_0^2-\omega^2)A-\frac{\omega_0^2}{3}B=0 & (1)\\-\omega_0^2A+(\omega_0^2-\omega^2)B=0 & (2)\end{cases}$, le système d'équations admet des solutions non triviales telles que $A\neq0$ et $B\neq0$

si le déterminant $\begin{vmatrix}(3\omega_0^2-\omega^2) & -\frac{\omega_0^2}{3}\\-\omega_0^2 & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}=0$. D'où $(3\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-\omega^2)-\frac{\omega_0^4}{3}=0$

d'où $\begin{cases}\omega_1=\left[\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\right]^{1/2}\omega_0\approx0.919\omega_0\\\omega_2=\left[\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}\right]^{1/2}\omega_0\approx1.776\omega_0\end{cases}$

2 points

3. Les solutions générales : $\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\\x_2(t)=B_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\end{cases}$

1 point