Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene

Physique 3 (VOM) **Epreuve de rattrapage, 23/09/2019** **Année 2018-2019**

Licence L2-ST **Durée 1 h 30 mn**

Exercice 1 (5 points) : Oscillations libre un degré de liberté

Le système de la figure 1 est constitué d'un cylindre plein et homogène de masse M et de rayon R qui peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution fixe. Un fil inextensible, de masse négligeable, entraine le cylindre sans glisser sur lui. Les deux extrémités de ce fil sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.

On donne : M= 20Kg, R= 10 cm et K= 100 N/m, $J_o = \frac{MR^2}{2}$.

1- Etablir l'équation du mouvement.

2- On écarte le système de sa position d'équilibre puis on le lâche.
Quelle est la valeur de α qu'il faut se donner pour que le système revienne à sa position d'équilibre dans le temps le plus court possible.

3- pour α = 20 Kg/s, déterminer la solution de l'équation mouvement, sachant qu'à l'instant initial on communique au point A une vitesse verticale V_o =1 cm/s.

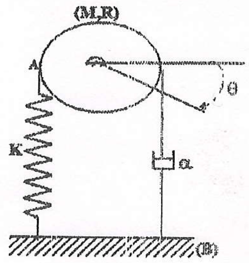

Figure 1

Exercice 2 (5 points) : Oscillations forcées un degré de liberté

Un cylindre plein et homogène, de masse M, de rayon R, peut osciller sans frottement autour de son axe de révolution horizontal (Δ). Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par le centre du disque O. Un ressort vertical, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre reliée au cylindre en un point A situé à une distance a=R/2 du centre O. En position d'équilibre la tige est verticale avec la masse m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le cylindre subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force F(t)= f_o cos (wt) perpendiculaire à la tige.

On donne : M= 1kg, m_1=m_2= 0.1Kg, K=16 N/m, R= 20cm, L_1= 50 cm, L_2= 25 cm, g= 10 m/s, α= 0.31 kg/s, a= R/2, $J_o = \frac{MR^2}{2}$.

1- Etablir l'équation du mouvent.

2- Trouver sa solution en régime permanent.

3- Calculer le coefficient de qualité Q du système. Déterminer la valeur de f_o pour qu'à la résonance l'amplitude angulaire maximale soit égale à $\pi/30$ rd.

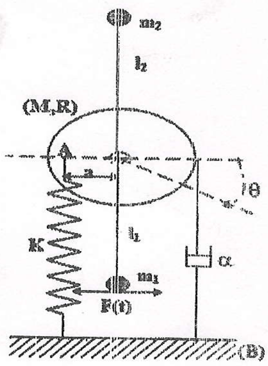

Figure 2

Exercice 3 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté

Un cylindre plein et homogène de masse M et de rayon R peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution. Une extrémité du ressort de raideur K_o est fixée au cylindre au point A (OA=R), l'autre à la masse m ($m = \frac{M}{2}$). Cette masse est reliée à un bati fixe B par un ressort de raideur K (K=2K_o).

1- Etablir les équations du mouvement en fonction de X_1(X_1= Rθ) et X_2.

2- Calculer les pulsations propres W_1 et W_2 du système mécanique.

3- Ecrire les solutions X_1(t) et X_2(t) en fonction du temps.

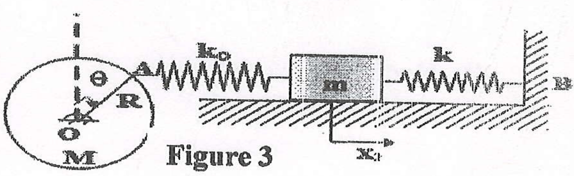

Figure 3

Exercice 4 (5 points) : Oscillations libres à deux degrés de liberté

Le système représenté sur la figure 4, est constitué par deux pendules simples, identiques, de longueur (L_1=L_2=L) et de masse (m_1=m_2=m). Les deux pendules sont couplés par un ressort de raideur Ko. Le milieu de chaque pendule est relié à un bâti fixe par un ressort de raideur K. A l'équilibre les deux pendules sont en position verticale. Les conditions initiales sont : $X_1(0) = X_o$, $X_2(o)$= 0 et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

1- Etablir les équations du mouvement en fonction de X_1 et X_2.

2- Déterminer les pulsations propres du système W_1 et W_2 (W_2> W_1).

3- Dans le cas du couplage faible (Ko << K), trouver les solutions X_1(t) et X_2(t) et représenter sur deux graphes différents l'un au-dessous de l'autre les variations X_1(t) et X_2(t) en fonction du temps. Comment appelle- t-on ce phénomène ?

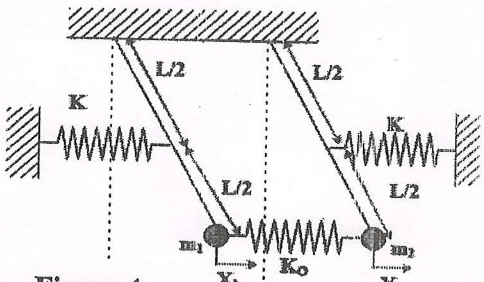

Figure 4

Université des Sciences et de technologie Houari Boumediene

Physique 3 (VOM)

Solution du rattrapage **2018-2019**

Exercice 1

1. $L = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$ et $D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$ $\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$ $\ddot{\theta} + 2\frac{\alpha}{M}\dot{\theta} + 2\frac{k}{M}\theta = 0$ 2pt

$\delta = \frac{\alpha}{M}$ $w_o^2 = 2\frac{k}{M}$

2. Régime critique $\delta = w_o^2$ $\frac{\alpha}{M} = \sqrt{10}$ $\alpha = M\sqrt{10}$ $\boldsymbol{\alpha = 20\sqrt{10}\ kg.s^{-1}}$ 1.5pt

3. $\alpha = 20\,Kg.s^{-1}$ $w_0^2 = \frac{2k}{M} = 10\ (rd.s^{-1})^2$ $\boldsymbol{w_0 = \sqrt{10}\ rd.s^{-1}}$ et

$\boldsymbol{\delta = \frac{\alpha}{M} = \frac{20}{20} = 1\ s^1}$ **Donc :** $\boldsymbol{\delta < w_0}$ Régime pseudo périodique

$\theta(t) = Ae^{-\delta t}(\cos w_a t + \varphi)$ $w_a = \sqrt{w_0^2 - \delta^2} = 3\ \ rd.s^{-1}$ 1.5pt

$\dot{\theta}(0) = \frac{v(0)}{R} = \boldsymbol{0.1\ \ rd.s^{-1}}$ $\begin{cases} \boldsymbol{A = 0.033rd} \\ \boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta(t) = 0.033\ e^{-t}\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)}$

Exercice 2

1. $\boldsymbol{L = T - U}$ $\boldsymbol{L = \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{KR^2}{4} + mg(l_1 - l_2)\right]\theta^2}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + l_1F(t)$$

$$\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left[\frac{KR^2}{4} + mg(l_1 - l_2)\right]\theta = l_1F(t)$$ 2pt

$$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha R^2}{\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]}\dot{\theta} + \frac{\left[\frac{KR^2}{4} + mg(l_1 - l_2)\right]}{\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]}\theta = \frac{l_1 f_o \cos wt}{\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]}$$

2. $\boldsymbol{\theta_p(t) = A\cos(wt + \emptyset)}$ $\boldsymbol{A(w) = \frac{\frac{l_1 f_o}{\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]}}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}}$ $\begin{cases} \boldsymbol{\phi(w) = \frac{2\delta w}{w_0^2 - w^2}} \\ \boldsymbol{\sin\phi(w) < 0} \end{cases}$ 1pt

3. $\boldsymbol{Q = \frac{w_a}{2\delta} = \frac{w_0}{2\delta}}$ $\boldsymbol{Q = \frac{\left[\frac{KR^2}{4} + mg(l_1 - l_2)\right]}{4\alpha R^2} = 8.28}$ 1pt

$$\boldsymbol{W_R^2 = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}}$$

$\boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\frac{l_1 f_o}{\left[\frac{MR^2}{2} + m(l_1^2 + l_2^2)\right]}}{2\delta\sqrt{w_0^2 - \delta^2}}}$ $\boldsymbol{f_o = 0.385\ N}$ 1pt

Exercice3

1. $T = \frac{1}{2}j_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$ $j_0 = \frac{MR^2}{2}$ $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}$

$U = \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$ $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}k\left[\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right]}$

$$\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k\left[\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right]}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{m\ddot{x}_1 + \frac{k}{2}(x_1 - x_2) = 0} \\ \boldsymbol{m\ddot{x}_2 + kx_2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1) = 0} \end{cases}$$

1pt

1pt

$$\begin{bmatrix} -mw^2+\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & -mw^2+\frac{3k}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. L'équation aux pulsations propres est : $\boldsymbol{m^2w^4-2\,Km\,w^2+\frac{k^2}{2}=0}$

$w_1^2=\frac{K(\sqrt{2}-1)}{m\sqrt{2}}$ $\qquad$ $w_2^2=\frac{K(\sqrt{2}+1)}{m\sqrt{2}}$

2pt

$r_1=\frac{k-2w_1^2}{k}$ $\qquad$ $r_2=\frac{k-2w_2^2}{k}$

3. $\begin{cases} x_1(t)=A_{11}\,cos(w_1t+\phi_1)+A_{12}\,cos(w_2t+\phi_2) \\ x_2(t)=A_{21}\,cos(w_1t+\phi_1)+A_{22}\,cos(w_2t+\phi_2) \end{cases}$

1pt

Exercice 4

1. $\boldsymbol{L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)x_1^2+\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)x_2^2+\;k_o(x_1-x_2)^2\right]}$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_j+\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)x_1+k_0(x_1-x_2)=0 \\ m\ddot{x}_2+\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)x_2+k_0(x_2-x_1)=0 \end{cases}$$

1.5 pt

2. On pose que $\begin{cases} \varphi_1=x_1+x_2 \\ \varphi_2=x_1-x_2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} m\ddot{\varphi}_1+\left(\frac{gm}{L}+\frac{k}{4m}\right)\varphi_1=0 \\ m\ddot{\varphi}_2+\left(\frac{k}{4}+\frac{gm}{L}+2k_0\right)\varphi_2=o \end{cases}$

$$\begin{cases} w_1=\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}} \\ w_2=\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}+\frac{2k_0}{m}} \end{cases}$$

1.5pt

3. $\begin{cases} x_1(t)=x_0\left[cos\frac{w_2+w_1}{2}t\,cos\frac{w_2-w_1}{z}t\right] \\ x_{z2}(t)=x_0\left[sin\frac{w_2+w_i}{2}t\,sin\frac{w_2+w_1}{2}t\right] \end{cases}$

1pt

Pulsation de modulation $\qquad$ $w_m=\frac{w_2-w_1}{2}$

Pulsation d'oscillation $\qquad$ $w_{ocs}=\frac{w_2+w_1}{2}$

0.5pt

Phénomène de battement

0.5pt