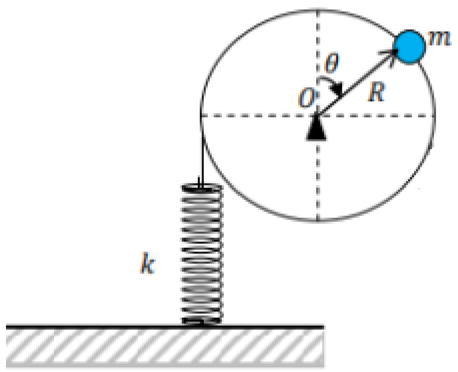
USTHB
Faculté de Physique
2éme Année ST Génie Civil

2019/2020
Vibrations et Ondes Mécaniques
Durée : 45 minutes

Interrogation (Sujet A)

Exercice 1 (Système libre à un degré de liberté)



Un disque de masse M et de rayon R peut tourner dans le plan vertical autour d'un axe fixe, perpendiculaire à ce plan et passant par son centre O. Une masse ponctuelle m est soudée au disque sur sa circonférence. Le disque est relié à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k comme indiqué sur la figure. On écarte légèrement le système de sa position d'équilibre. On pose $x(t) = R\theta(t)$. A l'équilibre $x = 0$ On note g l'accélération de la pesanteur

a)- Montrer que l'énergie potentielle du système U est de la forme $U = \frac{1}{2}(A - B)x^2$ préciser A et B

b)- Déterminer le Lagrangien L du système.

c)- En déduire l'équation du mouvement

d)- Quelle est la condition d'oscillation du système ?

e)- Résoudre l'équation différentielle :

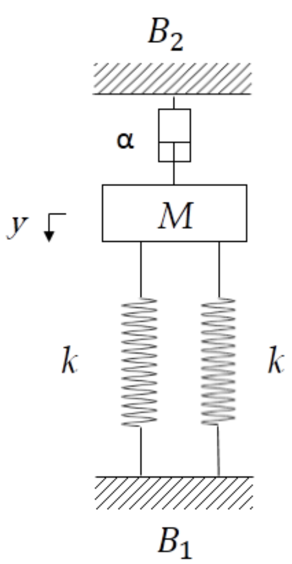
On donne :

$x(0) = 1m$ et $\dot{x}(t = 0) = 0m/s$

$g = 9.81m/s^2$

$J_0 = \frac{MR^2}{2}$ Le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R.

Exercice 2 (Système Amorti à un degré de liberté)



Une masse M est attachée à un bâti B_1 par le biais de deux ressorts de raideur k et à un bâti B_2 par le biais d'un amortisseur de constante d'amortissement α, la position de la masse M est repérée par la coordonnée y

a)- Calculer le Lagrangien du système et la fonction de dissipation

b)- En déduire l'équation du mouvement.

c)- Quel est le régime d'oscillation ? en déduire la forme de la solution recherchée

$\alpha = 10kg.s^{-1}$ $k = 12.5N/m$ et $M = 1kg$

Corrigé

Exercice 1

a)- Calcul de l'énergie potentielle
$U = U_{ressort} + U_{gravitation}$
$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 - mgR(1 - cos(\theta)$
Cette équation peut s'écrire dans l'approximation des petits angles
$(cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + ...)$
$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 - mgR\frac{\theta^2}{2}$
et en fonction de la variable x
$U = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{mg}{2R}x^2$
b)- L'énergie cinétique du systéme
$T = T_{Poulie} + T_{masse}$
$T = \frac{1}{2}(J + mR^2)\dot{\theta}^2$
Le moment d'inertie d'une poulie est donné par $J = \frac{MR^2}{2}$
$T = \frac{1}{2}(\frac{MR^2}{2} + mR^2)\dot{\theta}^2$
Ce qui donne en fonction x
$T = \frac{1}{2}(\frac{M}{2} + m)\dot{x}^2$
c)- En appliquant l'équation de lagrange on obtient l'équation du mouvement
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Tel que $\omega_0^2 = \frac{k - \frac{mg}{R}}{\frac{M}{2} + m}$
d)- La condition d'oscillation du système est donnée pour $\omega_0 > 0$ ce qui donne $\frac{mg}{R} < k$
e)- la solution de l'équation est différentielle est de la forme
$x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$
En tenant compte des conditions initiales nous obtenons $\phi = 0$ et $A = 1m$

Exercice 2

a)- Calcul des énergies
$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$, $U = ky^2$
La fonction de dissipation est donnée par $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$
b)- L'équation du mouvement
$\dot{\dot{y}} + \frac{\alpha}{M}\dot{y} + \frac{2k}{M}x = 0$
Qu'on écrit comme
$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$
c)- Calcul du discriminant de l'équation
$\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$
AN: $\Delta = 0$
On est donc dans le cas d'un régime critique d'oscillation
$y(t) = (At + B)e^{-\delta t}$
A et B sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions initiales