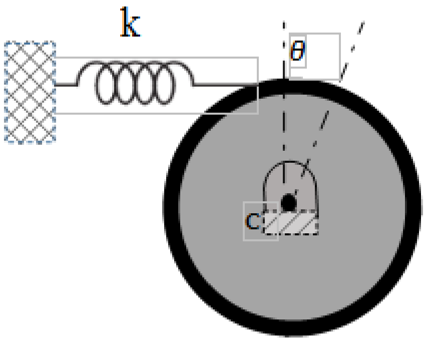
USTHB
Faculté de Physique
2éme Année ST Génie Civil

2019/2020
Vibrations et Ondes Mécaniques
Durée : 45 minutes

Interrogation

Partie 1 (Système libre à un degré de liberté)



Un disque de masse M et de rayon R peut tourner autour de d'un axe fixe passant par son centre de masse. Il est relié à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k.

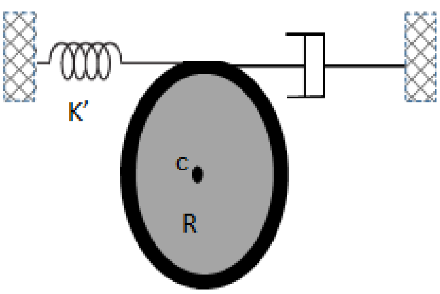
On se propose de déterminer la fréquence propre des oscillations lorsque celui-ci est écarté d'une position d'équilibre puis relâché pour osciller librement.

a)- Trouver l'expression de la fonction de Lagrange.

b)- En déduire l'équation du mouvement en fonction de la variable θ.

c)- En déduire la pulsation propre du système et donner la forme générale de la solution de l'équation

Partie 2 (Système Amorti à un degré de liberté)



Le disque précédent est maintenant relié à un nouveau ressort de raideur k' et il peut également rouler sans glisser sur un tapis. Les frottements avec le tapis sont modélisés par un amortisseur de coefficient d'amortissement α

a)- Trouver l'expression de la fonction de Lagrange.

b)- En déduire l'équation du mouvement en fonction de la variable θ.

c)- En déduire l'expression de la pulsation propre du système ω_0 et celle du facteur d'amortissement

d- Dans le cas où ($\alpha = 200kg.s^{-1}$, $k' = 4000N/m$ et $M = 10kg$) Quel est le régime d'oscillation ? Donner dans ce cas la forme générale de la solution

e)- Comparer la pulsation propre obtenue avec celle de obtenue dans la première partie et trouver une relation entre k' et k dans le cas où les pulsation proposes sont égales

Corrigé

Partie 1

a)- Calcul de la fonction de Lagrange
$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$
Avec $J_0 = \frac{MR^2}{2}$
$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$
$L = T - U$
L'équation du mouvement s'écrit alors $\ddot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0$
La pulsation propre du système est donc donnée par $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$
Dans ce cas la solution est donnée par $\theta(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$

Partie 2

a)- Calcul des énergies
$T = \frac{1}{2}(J_0 + MR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2)\dot{\theta}^2$
$U = \frac{1}{2}k'(2R)^2$
La fonction de dissipation est donnée par $D = \frac{1}{2}4\alpha R^2\dot{\theta}^2$
b,c)- L'équation du mouvement
$\ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{8k'}{3M}\theta = 0$
Avec
$\delta = \frac{4\alpha}{3M}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{8k'}{3M}}$
d)- Calcul du discriminant de l'équation
$\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$
AN: $\Delta < 0$
On est donc dans le cas d'un régime pseudo-périodique
$\theta(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega_A t + \phi)$
A et ϕ sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions initiales
$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
e)- En posant les deux pulsation égales on obtient $k' = \frac{6}{8}k$