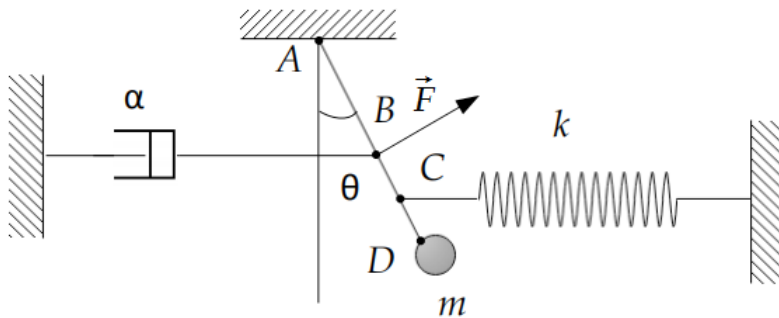


Interrogation (Sujet A)

Exercice 1 (Système forcé à un degré de liberté)



On considère une tige de masse négligeable et de longueur l à l'extrémité de laquelle est attachée une masse m . Au point B (milieu de la tige) est attaché un amortisseur de constante d'amortissement α et en ce même point une force $F = F_0 \cos(\omega t)$ est appliquée. Un ressort de raideur k est également attaché à un point C de la tige

- Donnez le Lagrangien du système ainsi que la fonction dissipation
 - En déduire l'équation du mouvement
 - Donner la réponse du système en régime permanent
- On donne : $AB = \frac{l}{2}$ et $BC = \frac{l}{4}$

Exercice 2 (Système libre à deux degrés de liberté)

Le Lagrangien d'un système à 2DDL s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 \dot{x} l \dot{\theta} - kx^2 - \frac{1}{2}(m_2 g l \theta^2)$$

- Trouver les équations du mouvement de m_1 et de m_2 en fonction de x et de θ On prendra $m_1 = 2m$ et $m_2 = m$, $\frac{g}{l} = \frac{k}{m}$ et on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- Calculer les pulsations propres du système en fonction de ω_0 .
- Calculer les rapports d'amplitudes et en déduire l'expression générale des solutions $x(t)$ et $\theta(t)$
- Question Bonus : dans le cas où $x(0) = x_0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Écrire les expressions de $x(t)$ et $\theta(t)$

Solution

Exercice 1

a)- Les énergies cinétiques et potentielles s'écrivent pour ce système :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl\frac{\theta^2}{1} + \frac{1}{2}k(\frac{3l}{4}\theta)^2$$

La fonction de dissipation s'écrit pour ce système :

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2$$

Le lagrangien du système s'écrit :

$$L = T - V$$

b)- L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + (\frac{g}{l} + \frac{9k}{16m})\theta + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} = \frac{F}{2ml}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = \frac{F}{2ml}$$

$$\text{où } \omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{9k}{16m} \text{ et } \delta = \frac{\alpha}{8m}$$

c)- La solution de cette dernière équation en régime permanent s'écrit :

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$

où

$$A = \frac{\frac{F_0}{2ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Exercice 2

a)- Les équations de mouvement de m_1 et m_2 :

$$m_1 = 2m, m_2 = m \text{ et } \frac{g}{l} = \omega_0^2$$

$$L = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} - kx^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$\begin{cases} 3m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases} \text{ qui s'écrit } \begin{cases} 3m\ddot{x} + m\ddot{y} + 2kx = 0 \\ ml\ddot{y} + ml\ddot{x} + mgy = 0 \end{cases} \text{ qui donne}$$

$$\begin{cases} 3\ddot{x} + \ddot{y} + 2\omega_0^2x = 0 \\ \ddot{y} + \ddot{x} + \omega_0^2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\ddot{x} + \ddot{y} + 2\omega_0^2x = 0 \\ \ddot{y} + \ddot{x} + \omega_0^2y = 0 \end{cases}$$

Avec $y = l\theta$

b)- Les pulsations propres: (1.5)

On cherche des solutions du type: $x = A\cos(\omega t + \phi)$, $y = B\cos(\omega t + \phi)$

En remplaçant dans les équations de mouvement on trouve le système suivant:

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - 3\omega^2)A - \omega^2B = 0 \\ -\omega^2A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} (2\omega_0^2 - 3\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solution n'est possible que si le déterminant est nul.

Le calcul des pulsation propres du système revient donc à résoudre l'équation algébrique suivante :

$$(2\omega_0^2 - 3\omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$$

qui a pour solution $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ et $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$

c) Les expressions générales des solutions x et y sont alors données

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$y(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Avec $y = l\theta$ Calcul des rapports d'amplitudes :

On pose

$$r_1 = \frac{B_1}{A_1} \text{ et } r_2 = \frac{B_2}{A_2}$$

Pour $\omega = \omega_1$

$$(2\omega_0^2 - 3\omega_1^2)A_1 - \omega_1^2 B_1 = 0$$

ce qui donne

$$r_1 = +1$$

Pour $\omega = \omega_2$

$$(2\omega_0^2 - 3\omega_2^2)A_2 - \omega_2^2 B_2 = 0$$

ce qui donne

$$r_2 = -2$$

On en déduit les solutions générales suivantes :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$y(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - 2A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

d) En remplaçant $t=0$ dans les équations précédentes et en faisant également le même travail pour les dérivées nous obtenons :

$$A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2) = x_0$$

$$A_1 \cos(\phi_1) - 2A_2 \cos(\phi_2) = 0$$

$$-\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) = 0$$

$$-\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 2A_2 \sin(\phi_2) = 0$$

La solution de ce système d'équation est :

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, A_1 = \frac{2}{3}x_0 \text{ et } A_2 = \frac{x_0}{3}$$