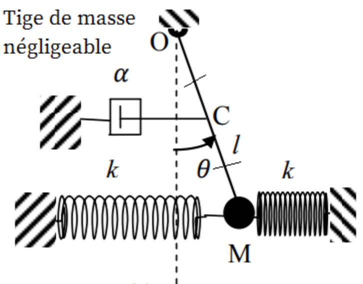
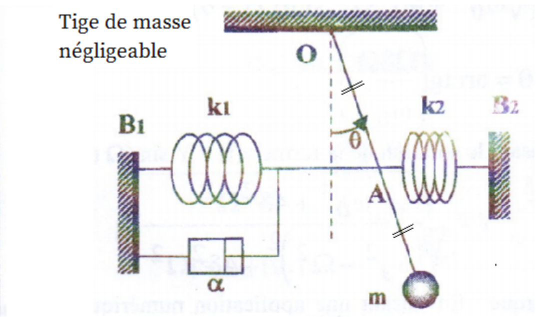
# Interrogation (Sujet B)

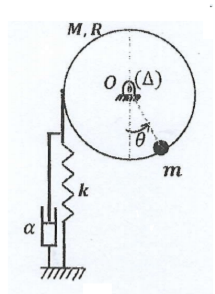
## Exercice 1 (Système libre à un degré de liberté)



(a)



(b)



(c)

Un oscillateur 1ddl libre amorti possède les quantités physiques suivantes : $Ec = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$ , $Ep = \frac{1}{2}bq^2$, $D = \frac{1}{2}c\dot{q}^2$

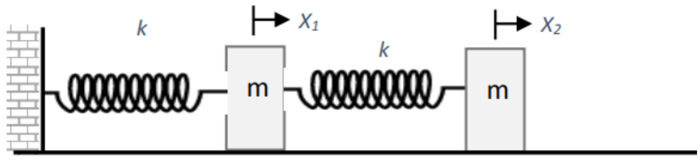
**a)**- Déterminer l'équation de mouvement en fonction de la variable généralisée q.

**b)**- Exprimer la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur d'amortissement $\delta$ en fonction de a, b et c.

**c)**- Choisir un des trois systèmes suivants et déterminer les expressions de a, b et c.

**d)**- L'amplitude des oscillations observées lorsque l'oscillateur évolue librement diminue de 20% pendant une période. Si la pseudo-période mesurée est $T_a = 1s$ en déduire les valeurs de $\omega_0$ et $\delta$.

## Exercice 2 (Système à deux degrés de liberté)




Deux masses identiques sont reliées comme sur la figure ci-dessus par des ressorts identiques de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement. Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

**a)**- En utilisant le formalisme de Lagrange établir les équations différentielles de mouvement.

**b)**- Trouver les deux pulsations propres en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

**c)**- Déterminer les rapports d'amplitudes et en déduire les expressions générales de $x_1$ et $x_2$

d- Question Bonus : On suppose qu'à t=0 $x_1(0) = 1cm$, $x_2(0) = 1cm$, $\dot{x_1}(0) = 0$, $\dot{x_2}(0) = 0$

trouver les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$

## SOLUTION

Exercice 1 :

1. C'est un oscillateur amorti à 1 DDL donc :
   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right) avec\, L=\frac{1}{2}a\dot{q}^2-\frac{1}{2}bq^2 et, D=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$$
   $$a\ddot{q}+c\dot{q}+bq=0 \rightarrow \ddot{q}+\frac{c}{a}\dot{q}+\frac{b}{a}q=0$$
2. C'est l'équation d'un système amorti de la forme : $\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q=0$ avec :

| système | a | b | c |
|---|---|---|---|
| (a) | $ml^2$ | $kl^2+mgl$ | $\alpha l^2/4$ |
| (b) | $ml^2$ | $(k_1+k_2)\frac{l^2}{4}+mgl$ | $\alpha\frac{l^2}{4}$ |
| (c) | $mR^2+\frac{MR^2}{2}$ | $kR^2+mgR$ | $\alpha R^2$ |

$$\omega_0=\sqrt{\frac{b}{a}} et\, \delta=\frac{c}{2a}$$

3. Système (a) :

| système | $\omega_0$ | $\delta$ |
|---|---|---|
| (a) | $\sqrt{\frac{kl^2+mgl}{ml^2}}$ | $\frac{\alpha}{8m}$ |
| (b) | $\sqrt{\frac{k_1+k_2}{4m}+\frac{g}{l}}$ | $\frac{\alpha}{8m}$ |
| (c) | $\sqrt{\frac{(kR^2+mgR)}{mR^2+\frac{MR^2}{2}}}$ | $\frac{\alpha R^2}{2(mR^2+\frac{MR^2}{2})}$ |

4.

5. $\omega_0=\sqrt{\frac{b}{a}} et\, \delta=\frac{c}{2a}$

6. $D=\ln\left(\frac{100\%}{100\%-20\%}\right)=0.22=\delta T_a \rightarrow \delta=\frac{D}{T_a}=0.22\, s^{-1} \vee \omega_0=\sqrt{\omega_a^2+\delta^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2+\delta^2}=6.28\, rad.s^{-1}$

**Exercice2 :**

1. $L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1+2k\,x_1-k\,x_2=0 \\ m\ddot{x}_2+k\,x_2-k\,x_1=0 \end{cases}$$

2. On cherche des solutions du type sinusoïdal : $\begin{cases} x_1=A\cos(\omega t+\phi_1) \rightarrow x_1=-\omega^2 x_1 \\ x_2=B\cos(\omega t+\phi_2) \rightarrow x_2=-\omega^2 x_2 \end{cases}$

   Les équations de mvt deviennent :

$$\begin{cases} (2k-m\omega^2)\,x_1-k\,x_2=0 \\ (k-m\omega^2)\,x_1-k\,x_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2\,\omega_0^2-m\,\omega^2)\,x_1-\omega_0^2\,x_2=0 \\ (\omega_0^2-m\,\omega^2)\,x_2-\omega_0^2\,x_1=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (2\,\omega_0^2-\omega^2)\,x_1-\omega_0^2\,x_2=0 \\ -\omega_0^2\,x_1+(\omega_0^2-\omega^2)\,x_2=0 \end{cases} (I)$$

   C'est un système homogène qui n'a de solutions non nul que si le déterminant est nul.

$$(2\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-\omega^2)-(-\omega_0^2)(-\omega_0^2)=0$$

$$\omega^4-3\,\omega_0^2\,\omega^2+\omega_0^2=0 \rightarrow \Omega=\omega^2 \rightarrow \Omega^2-3\,\omega_0^2\,\Omega+\omega_0^2=0$$

Qui a pour solution $\Omega_{1,2}=\dfrac{(3\pm\sqrt{5})}{2}\,\omega_0^2\,d'ou\,\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{(3\pm\sqrt{5})}{2}}\,\omega_0 \rightarrow \omega_1=0.53\,\omega_0\,et\,\omega_2=3.7\,\omega_0$

   Donc $\cos(\omega_1 t+\phi_1)\,est\,une\,solution\,\cos(\omega_2 t+\phi_1)\,est\,une\,solution$

3. Les solutions générales s'écrivent donc grâce au principe de superposition comme suit :

   $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$

   $x_2=B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$

   Les 6 constantes $A_1, A_2, B_1, B_2, \phi_1\,et\,\phi_2\,peuvent\,être\,réduites\,à\,4\,grâce\,aux\,rapports\,d'amplitudes.$

   Du système (I) on déduit

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{(2\,\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}=2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

- ❖ $Lorsque\ \omega=\omega_1 \rightarrow 1\,er\,solution \rightarrow \begin{matrix} x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) \\ x_2=B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) \end{matrix}$

$$Dans\,ce\,cas\,\mu_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{B_1}{A_1}=2-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}=2-\frac{(3-\sqrt{5})}{2}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}=1.62$$

- ❖ $Lorsque\ \omega=\omega_1 \rightarrow 2\,e\,solution \rightarrow \begin{matrix} x_1=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ x_2=B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{matrix}$

$$Dans\,ce\,cas\,\mu_2=\frac{x_2}{x_1}=\frac{B_2}{A_2}=2-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}=2-\frac{(3+\sqrt{5})}{2}=(1-\sqrt{5})=-1.24$$

   D'où les solutions générales s'écrivent :

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$x_2=1.24\,A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-3.24\,A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

4.

$$\begin{matrix} x_1(0)=1 \\ x_2(0)=-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2=1\,(1) \\ \mu_1 A_1\cos\phi_1+\mu_2 A_2\cos\phi_2=-1\,(2) \end{matrix}$$

$\dot{x}_1(0)=0 \rightarrow \quad A_1\omega_1\sin\phi_1+A_2\omega_2\sin\phi_2=0(3)$
$\dot{x}_2(0)=0 \quad \mu_1A_1\omega_1\sin\phi_1+\mu_2A_2\omega_2\sin\phi_2=0(4)$

$\mu_2(1)-(2)=(\mu_2-\mu_1)A_1\cos\phi_1=2(5)$

$\mu_1(1)-(2)=(\mu_1-\mu_2)A_2\cos\phi_2=2(6)$

$\mu_2(3)-(4)=(\mu_2-\mu_1)\omega_1A_1\sin\phi_1=0(7)$

$\mu_1(1)-(2)=(\mu_1-\mu_2)A_2\omega_2\sin\phi_2=0(8)$

De (7) et (8) on déduit $\phi_1=\phi_2=0$

On remplace dans (5) et (6) on trouve $A_1=\dfrac{2}{\mu_2-\mu_1}=-0.7\, et\, A_2=\dfrac{2}{\mu_1-\mu_2}=0.7$

D'où les solutions s'écrivent $\begin{array}{l} x_1=-0.7\cos\omega_1t+0.7\cos\omega_2t \\ x_2=-1.13\cos\omega_1t-0.87\cos\omega_2t \end{array}$