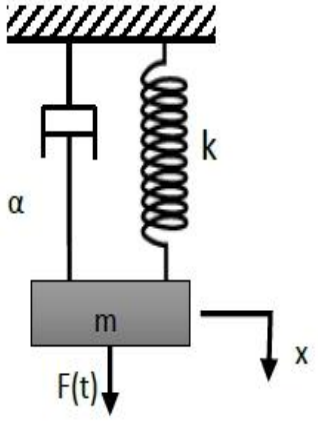
Trouver la réponse totale du système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté de la figure 11 avec m=10 kg, α=20Ns/m, k==4000N/m, x_0= 0,0l m et
$\dot{x}_0$ =0 avec les conditions suivantes : ·
(a) Une force extérieur F(t)=F_0 cos (ωt) agit sur le système avec F_0=100N et
ω= 10 rad/s.
(b) Les oscillations sont libres avec F(t)=0



$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2} \ , \quad \boldsymbol{U = \frac{1}{2}m(x + x_0)^2 - mgx}$$

ou $\boldsymbol{x}$ est la position de $\boldsymbol{m}$ par rapport à la position de l'équilibre et $\boldsymbol{x_0}$

étant l'élongation initiale du ressort due au poids de la masse m.

La position de l'équilibre est caractérisée par la condition

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

A la position d'équilibre (x=0) l'énergie potentiel est minimale.

Ceci nous donne la relation $kx_0 = mg$.

L'énergie postentielle devient alors $= \boldsymbol{\frac{1}{2}kx^2 + C}$, $ou\ \boldsymbol{C}\ est\ une\ constante (C = \frac{1}{2}kx_0^2)$

La fontion de dissipation est : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$

$$L = T - U = \boldsymbol{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - C}$$

L'équation de lagrange est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) + F(t)$$

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)} \textbf{(I)}$$

Ou encore

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t)} \textbf{(I)}$$

La solution générale de cette égation est de la forme $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

$$ou\ x_H\ la\ solution\ homogène\ qui\ tend\ \ vers\ 0\ pour\ t\ grand$$

$$et\ x_p est\ de\ la\ même\ forme\ que\ le\ second\ membre.\ x_p(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Donc au en regime permanent (t grand) $x(t) = x_p(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Remplaçons dans **(I) nous avons**

$$(\omega_0^2 - \omega^2)Acos\ (\omega t + \phi)\ - 2\delta\ \omega Asin\ (\omega t + \phi)\ \ = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)Acos\ \omega t\ \cos\phi - \ (\omega_0^2 - \omega^2)Asin\ \omega t\ \sin\phi - 2\delta\omega Asin\ \omega t\ \cos\phi - 2\delta\omega Acos\ \omega t\ \sin\phi = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A\ \cos\phi - 2\delta\omega\ A\sin\phi = \frac{F_0}{m}$$

$$-\ (\omega_0^2 - \omega^2)A\ \sin\phi - 2\delta\omega\ A\ \cos\phi = 0$$

de la 2ème équation nous avons tout de suite

$$\tan\phi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\ \ ,\qquad \text{càd}\ \boxed{\phi = \ -\arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

La 1ere équation nous donne

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m}\cos\phi$$

Or

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + tan\,\phi^2}}$$

En remplaçant et après simplification on trouve :

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\delta\omega)^2}}},\qquad F_0 = 100\,N\ \ et\ \omega = 10\ \ rad/s \rightarrow\ \ \omega_0 = 20\,rad/s\ \ \delta = 1\ s^{-1}$$

$$A = 0.033m\ = 3cm$$
$$\phi = -3.81°$$