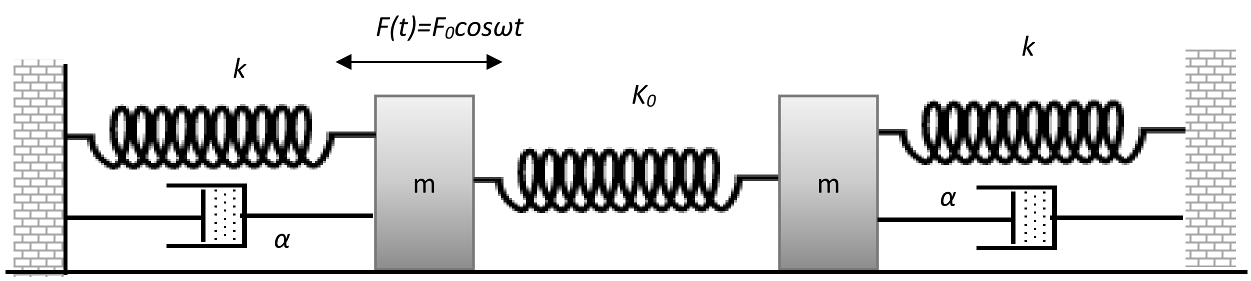
Chapitre 4 : Systèmes oscillatoires forcés à deux degrés de liberté

Introduction

Comme pour l'oscillation forcée à 1 degré de liberté :

- Une oscillation forcée à 2 ddl amortie ou non est une oscillation entretenue par une ou deux forces externes
- Nous nous limiterons à des forces sinusoïdales et une seule fréquence d'excitation ω.
- Pour une raison pédagogique nous commencerons par traiter un exemple simple et symétrique.
- Dans le cas général, l'utilisation de la représentation complexe semble être nécessaire.

On considère le système symétrique suivant : deux oscillateurs masse-ressort identiques couplés par un ressort de raideur k_0 (couplage élastique).



Un système forcé à 2 degrés de liberté est un système qui subit une force externe qui va entretenir son oscillation.

- *Deux variables généralisées sont nécessaires pour décrire le mouvement.*
- *Cette force peut être appliquée selon la première variable ou selon les deux.*

Recherche de l'équation de mouvement

- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$
- Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k\,x_2^2 = \frac{1}{2}(k+k_0)x_1^2 + \frac{1}{2}(k+k_0)x_2^2 - k_0x_1x_2$
- Le Lagrangien du système : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k+k_0)x_1^2 - \frac{1}{2}(k+k_0)x_2^2 + k_0x_1x_2$
- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

- Les équations de Lagrange et équations de mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F_0\cos\omega t \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+k_0)x_1 - k_0x_2 = F_0\cos\omega t & (a) \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + (k+k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 & (b) \end{cases}$$

En régime permanent, on sait que les solutions seront de la même forme que le second membre.
$x_1(t) = \boldsymbol{A_1}\,\boldsymbol{cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi_1})$ *et* $x_2(t) = \boldsymbol{A_2}\mathbf{cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi_2})$ notation complexe :

$$x_1(t) = \boldsymbol{A_1}\, \boldsymbol{e}^{(\omega t+\boldsymbol{\Phi_1})} \quad et \quad x_2(t) = \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{e}^{\omega t+\boldsymbol{\Phi_2}}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{A}_1 e^{i\omega t} \quad avec\ \overline{A_1} = A_1 e^{i\Phi_1} \dashrightarrow \dot{\bar{x}}_1 = \overline{\iota\omega A_1} e^{i\omega t} \quad \ddot{\bar{x}}_1 = -\omega^2\, \bar{A}_1 e^{i\omega t} \\ \bar{x}_2 = \bar{A}_2 e^{i\omega t} \quad avec\ \overline{A_2} = A_2 e^{i\Phi_1} \dashrightarrow \dot{\bar{x}}_2 = \overline{\iota\omega A_2} e^{i\omega t} \quad \ddot{\bar{x}}_2 = -\omega^2\, \bar{A}_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$F(t) = F_0 \cos\omega t \dashrightarrow F_0 e^{i\omega t}$$

Les deux équations deviennent après simplification par $e^{i\omega t}$:

$$\begin{cases} (k + k_0 - \omega^2 m + i\alpha\omega_1)\bar{A}_1 - k_0\bar{A}_2 = F_0 \\ (k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha)\bar{A}_2 - k_0\bar{A}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k + k_0 - \omega^2 m + i\alpha\omega_1 & -k_0 \\ -k_0 & k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout le système par la méthode de Cramer, on obtient :

$$\bar{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_0 \\ 0 & k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k + k_0 - \omega^2 m + i\alpha & -k_0 \\ -k_0 & k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha \end{vmatrix}} = \frac{F_0(k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha)}{(k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha)^2 - k_0^2}$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\begin{vmatrix} k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha & F_0 \\ -k_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k + k_0 - \omega^2 m + i\alpha & -k_0 \\ -k_0 & k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha \end{vmatrix}} = \frac{F_0 k_0}{(k + k_0 - m\omega^2 + i\alpha)^2 - k_0^2}$$

Les solutions en régime permanent sont

$x_1(t) = \boldsymbol{A_1}\, \boldsymbol{cos}(\omega t + \boldsymbol{\Phi_1}) \quad et \quad x_2(t) = \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{co\,s}(\omega t + \boldsymbol{\Phi_2})ec$

$$A_1 = |\bar{A}_1| \quad et\ \boldsymbol{\Phi_1} = \boldsymbol{Arg}(\bar{A}_1)$$

$$A_2 = |\bar{A}_2| \quad et\ \boldsymbol{\Phi_2} = \boldsymbol{Arg}(\bar{A}_2)$$

➢ Etude des résonnances :

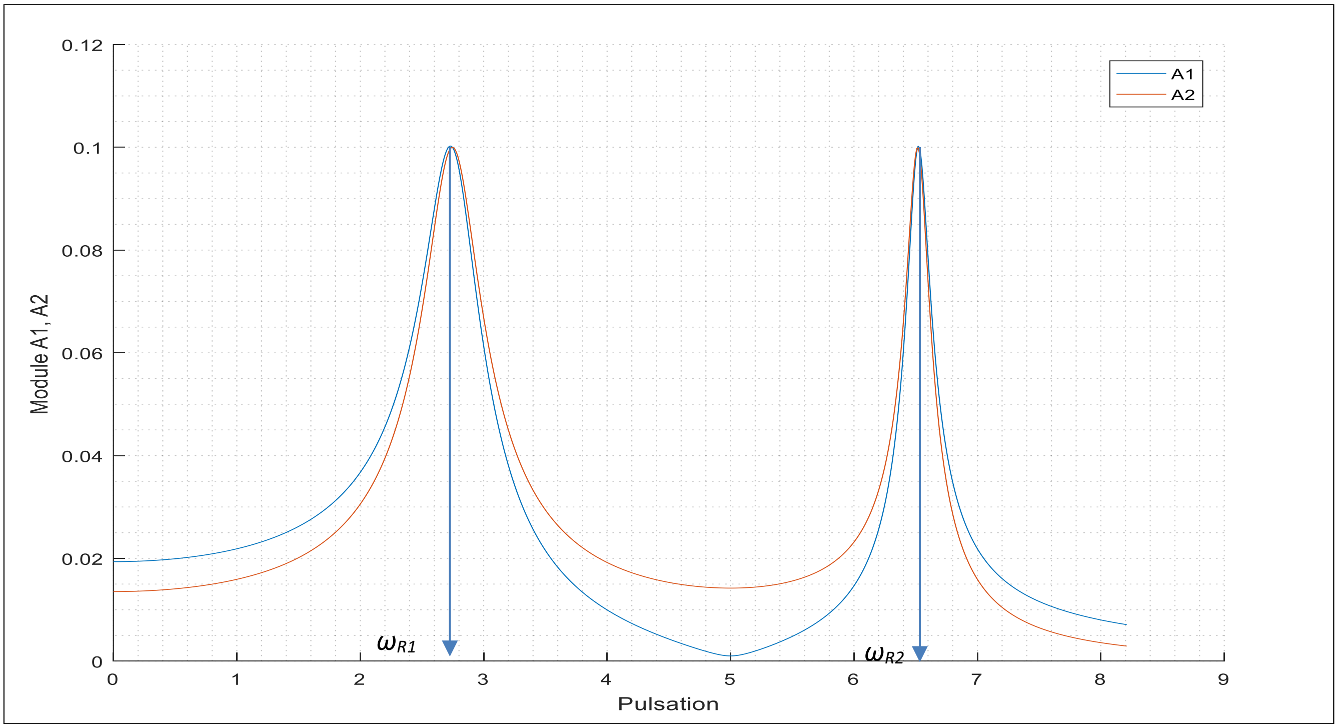
1) Utilisation des complexes :

Dans les expressions précédentes on constate que les amplitudes A1 et A2 dépendent de la plusation d'excitation ω. Les deux amplitudes ont les deux expressions suivantes :

$$A_1 = |\bar{A}_1| = F_0\sqrt{\frac{(k + k_0 - m\omega^2)^2 + \alpha^2}{((k + k_0 - m\omega^2)^2 - \alpha^2 - k_0^2\,)^2 - 4\alpha^2(k + k_0 - m\omega^2)^2}}$$

$$\bar{A}_2 = |\bar{A}_2| = F_0\sqrt{\frac{k_0}{((k + k_0 - m\omega^2)^2 - \alpha^2 - k_0^2\,)^2 - 4\alpha^2(k + k_0 - m\omega^2)^2}}$$

Ils sont présentés dans le but d'illustrer la lourdeur du traitement à l'aide des réelles. Néanmoins, avec le logiciel Matlab capable de traiter les nombres complexes on peut tracer les courbes amplitudes à partir de leurs formes complexes en fonction de la pulsation.



La figure est obtenue à l'aide du du script Matlab suivant

- Le script matlab :

```
m=40; F0=10; k=300; k0=700; alfa=100;

om0=sqrt(k/m); om=0:0.01:3*om0;    % omega interval

A1=F0*(k+k0 - m*om.^2 + i*alfa) ./((k + k0 - m*om.^2 + i*alfa).^2 -k0^2 )
A2=-F0*k0 ./((k + k0 - m*om.^2 + i*alfa).^2 -k0^2 ) ;

ModuleA1= sqrt(A1.*conj(A1));
ModuleA2= sqrt(A2.*conj(A2));
xlabel('Pulsation');ylabel('Module A1, A2');
plot(om, ModuleA1, om, ModuleA2);
grid minor
```

2) Approximation faible amortissement :

On peut aussi traiter le problème pour un faible amortissement ($\alpha \rightarrow 0$)
Dans ce cas les amplitudes deviennent réelles et s'écrivent comme suit :

$$A_1 = \frac{F_0(k + k_0 - m\omega^2)}{(k + k_0 - m\omega^2)^2 - k_0^2}$$

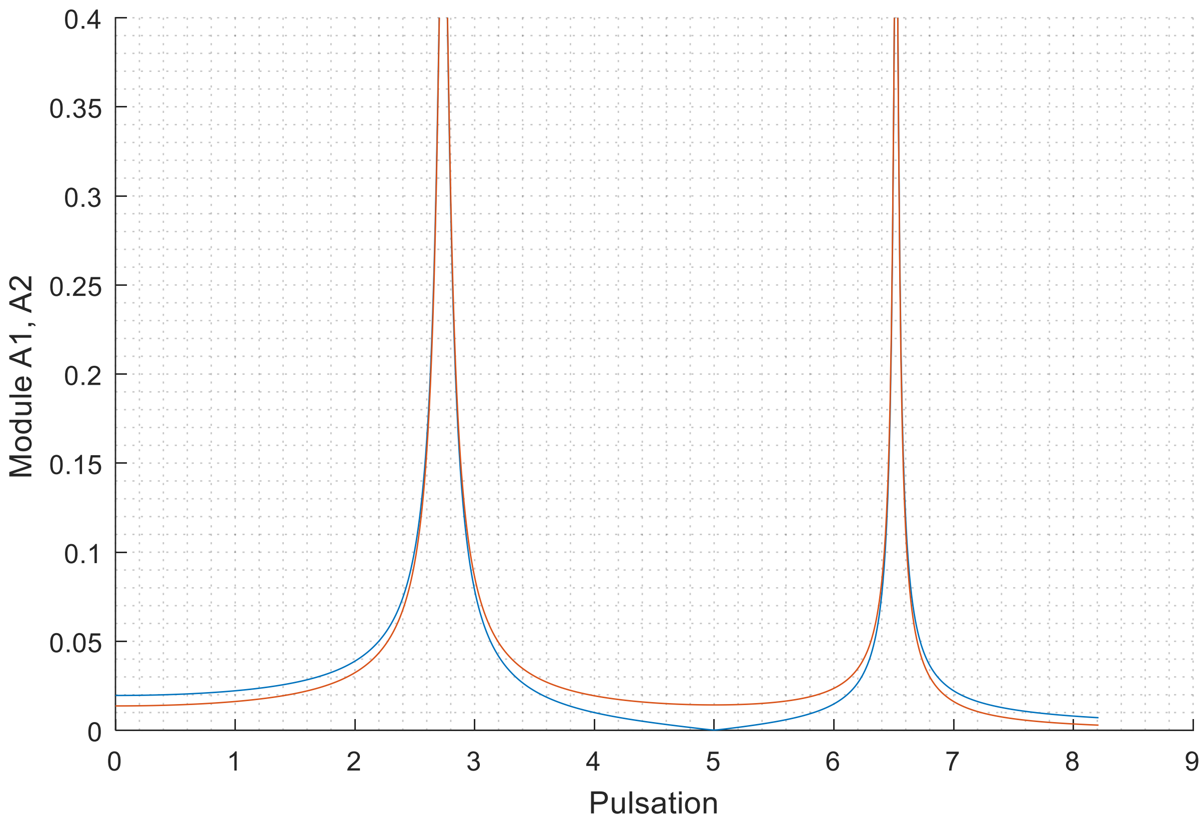
$$A_2 = \frac{-F_0 k_0}{(k + k_0 - m\omega^2)^2 - k_0^2}$$

Le dénominateur commun $(k + k_0 - m\omega^2)^2 - k_0^2$ accepte deux racines :

$$(k + k_0 - m\omega^2)^2 - k_0^2 = 0 \equiv \ (k + k_0 - m\omega^2 - k_0)(k + k_0 - m\omega^2 - k_0) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad et \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}$$

Qui ne sont autre que les pulsations propres du système libre non amorti 2 ddl.
Dans ce cas les deux pulsations de résonnances s'écrivent : $\omega_{R1} = \omega_1$, $\omega_{R2} = \omega_2$ et pour ces deux pulsations, les deux amplitudes tendent vers l'infini.



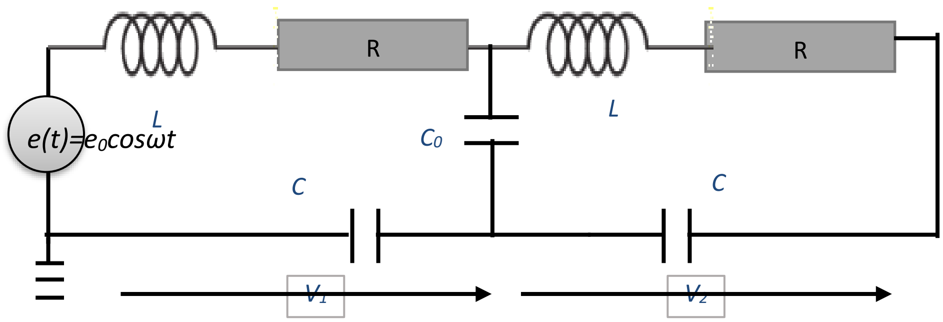
On remarque aussi que l'amplitude A1 s'annule pour une certaine pulsation:

$$F_0(k + k_0 - m\omega^2) = 0 \rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k + k_0}{m}}$$

La pulsation ω_a est appelée pulsation anti-résonnance car l'amplitude de l'oscillation est minimale.

3) Utilisation du circuit électrique équivalent :

En utilisant la loi des mailles et les équivalences entre paramètres mécaniques et électriques on peut montrer que les équations différentielles obtenu pour le circuit suivant sont équivalentes au système mécanique étudié en haut.



$$L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C_0}(q_1 - q_2) + \frac{q_1}{C} = e_0\cos\omega t \quad --\rightarrow L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)q_1 - \frac{1}{C_0}q_2 = e_0\cos\omega t$$

$$L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C_0}(q_2 - q_1) + \frac{1}{C}q_2 = 0 \quad --\rightarrow \quad L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)q_2 - \frac{1}{C_0}q_1 = 0$$

Utilisons les variables : $V_1 = \frac{q_1}{C}$ $et\ V_2 = \frac{q_2}{C}$:

$$LC\ddot{V}_1 + RC\dot{V}_1 + \left(1 + \frac{C}{C_0}\right)q_1 - \frac{C}{C_0}V_2 = e_0\cos\omega t$$

$$LC\ddot{V}_2 + RC\dot{V}_2 + \left(1 + \frac{C}{C_0}\right)V_2 - \frac{C}{C_0}V_1 = 0$$

Ces équations sont similaires aux équations du système mécanique de point de vue mathématique.

Posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\delta = \frac{R}{2L}$ (on divise les deux équations par LC):

$$\ddot{V}_1 + 2\delta\dot{V}_1 + \omega_0^2\left(1 + \frac{C}{C_0}\right)V_1 - \frac{C}{C_0}V_2 = \omega_0^2 e_0\cos\omega t$$

$$\ddot{V}_2 + 2\delta\dot{V}_2 + \omega_0^2\left(1 + \frac{C}{C_0}\right)V_2 - \omega_0^2\frac{C}{C_0}V_1 = 0$$

Définissons le facteur de couplage comme suit :

$K = \frac{C}{C+C_0} \longrightarrow \frac{1}{K} = \frac{C+C_0}{C} = 1 + \frac{C_0}{C} \rightarrow \frac{C_0}{C} = \frac{1}{K} - 1 = \frac{1-K}{K}$ $d'ou les\ deux\ paramètres \frac{C}{C_0} = \frac{K}{1-K}$ et $\frac{C}{C_0} + 1 = \frac{1}{1-K}$

Les deux équations deviennent :

$$\ddot{V}_1 + 2\delta\dot{V}_1 + \frac{\omega_0^2}{1-K}V_1 - \frac{K\omega_0^2}{1-K}V_2 = \omega_0^2 e_0\cos\omega t$$

$$\ddot{V}_2 + 2\delta\dot{V}_2 + \frac{\omega_0^2}{1-K}V_2 - \frac{K\omega_0^2}{1-K}\frac{C}{C_0}V_1 = 0$$

A l'aide d'un oscilloscope on peut visualiser les deux tensions $V_1(t)\ et\ V_2(t)$ pour chaque fréquence du générateur de tension basse fréquence (GBF) $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

- Régler le GBF à une fréquence donnée
- Visualiser La tension désirée (V1 ou V2)
- Mesurer son amplitude ($V_{10}\ ou\ V_{20}$)
- Répéter la procédure jusqu'au remplissage des tableaux $V_{10}(f)$ $et\ V_{20}(f)$

- Tracer les Coures de résonnance $des\ deux\ tensions\ V_1(t) et\ V_2(t)$

L'impédance mécanique :

L'mpédance mécanique mesure l'inertie ou l'attitude d'un système oscillatoire vis-à-vis d'une force qui lui est appliquée. L'impédance m »canique dépend de la fréquence. Elle est minimale au voisinage de la fréquence de résonnance.

L'impédenec est définie donc comme le rapport de la force à la vitesse : $Z = \frac{F}{v}$

Reprenons le système précédent. Nous avons établi les équations de mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+k_0)x_1 - k_0x_2 = F_0\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + (k+k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

Cherchons à réexprimer ces deux équations en fontion des vitesses $\dot{x}_1$ *et* $\dot{x}_2$ *au lieu de* x_1 *et* x_2*.*

L'imédance ici sera : $Z = \frac{F}{\dot{x}_1}$

Les équations aux vitesses :

Nous avons :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{A}_1 e^{i\omega t} \quad \dot{x}_1 = i\omega\bar{A}_1 e^{i\omega t} \quad \dot{x}_1 = i\omega\,\bar{x}_1 \ \rightarrow \ \boldsymbol{\bar{x}_1 = \frac{\dot{x}_1}{i\omega}} \quad \boldsymbol{aussi} \quad \boldsymbol{\ddot{\bar{x}}_1 = i\omega\,\dot{x}_1} \\ \bar{x}_2 = \bar{A}_2 e^{i\omega t} \quad \dot{x}_2 = i\omega\bar{A}_2 e^{i\omega t} \quad \dot{x}_2 = i\omega\,\bar{x}_2 \ \rightarrow \ \boldsymbol{\bar{x}_2 = \frac{\dot{x}_2}{i\omega}} \quad \boldsymbol{aussi} \quad \boldsymbol{\ddot{\bar{x}}_2 = i\omega\,\dot{x}_2} \end{cases}$$

Les deux équations deviennent alors : (en smpliant par multiplication par $i\omega$*)*

$$\begin{cases} m\,\boldsymbol{i\omega}\,\boldsymbol{\dot{x}_1} + \alpha\dot{x}_1 + (k+k_0)\frac{\boldsymbol{\dot{x}_1}}{\boldsymbol{i\omega}} - k_0\frac{\boldsymbol{\dot{x}_2}}{\boldsymbol{i\omega}} = \bar{F} \rightarrow (k+k_0-m\omega^2+i\omega\alpha)\dot{x}_1 - k_0\boldsymbol{\dot{x}_2} = i\omega\bar{F} & (1) \\ m\,\boldsymbol{i\omega}\,\boldsymbol{\dot{x}_2} + \alpha\dot{x}_2 + (k+k_0)\frac{\boldsymbol{\dot{x}_2}}{\boldsymbol{i\omega}} - k_0\frac{\boldsymbol{\dot{x}_1}}{\boldsymbol{i\omega}} = 0 \quad (k+k_0-m\omega^2+i\omega\alpha)\dot{x}_2 - k_0\dot{x}_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

A l'aide de la méthode de cramer on exprime $\dot{x}_1$ *et* $\dot{x}_2$

$$\dot{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} i\omega\bar{F} & -k_0 \\ 0 & k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega & -k_0 \\ -k_0 & k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega \end{vmatrix}} = \frac{i\omega(k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega)}{(k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega)^2-k_0^2}\,\bar{F}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega & i\omega\bar{F} \\ -k_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega & -k_0 \\ -k_0 & k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega \end{vmatrix}} = \frac{-i\omega k_0}{(k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega)^2-k_0^2}\,\bar{F}$$

L'impédance méaique est simplement déduite de la première expression

$$\boxed{Z_e = \frac{F}{\dot{x}_1} = \frac{i\omega(k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega)}{(k+k_0-m\omega^2+i\alpha\omega)^2-k_0^2}}$$