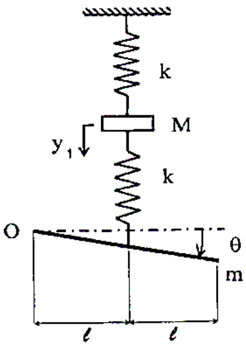

Figure (1)

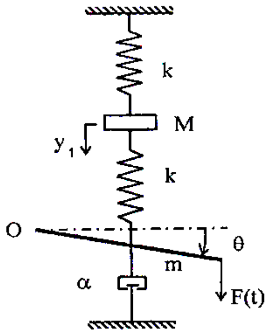

Figure (2)

Exo 4 :

A/ On considère la figure 1

1°)

$$T = \frac{1}{2}My_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad ,J = \frac{m(2l)^2}{12} + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

$$U = \frac{1}{2}k[y_1^2 + (y_1 - l\theta)^2]$$

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + k(2y_1 - l\theta) = 0 \\ \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + kl^2\theta - kly_1 = 0 \end{cases} \quad Or\ y_2 = l\theta$$

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + 2ky_1 - ky_2 = 0 \\ \frac{4}{3}m\ddot{y}_2 + ky_2 - ky_1 = 0 \end{cases}$$

2°) Calcul des pulsations propres ω_1 et ω_2 $en\, fonction\, de$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $M = 2m$

On pose $y_1(t) = A\, e^{j(\omega t + \phi_1)} y_2(t) = B\, e^{j(\omega t + \phi_2)}$

On obtient le système d'équations des deux inconnus A et B suivant

$$\begin{cases} -2m\omega^2 A + 2\,kA - k\,B = 0 \\ -\frac{4}{3}m\omega^2 B + kB - kA = 0 \end{cases} \text{ On normalisant on } \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A \quad - \quad \frac{\omega_0^2}{2}B = 0 \\ -\frac{3}{4}\omega_0^2 A \quad + \quad \left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)B = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant est nul :

⇨ $(\omega_0^2 - \omega^2)\left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right) - \frac{3}{8}\omega_0^4 = 0$ ➔ C'est l'équation aux pulsations propres

Après simplification on a ($8\omega^4 - 14\omega_0^2\omega^2 + 3\omega_0^4 = 0$)

On pose Ω = ω^2 on a donc $8\Omega^2 - 14\omega_0^2\Omega + 3\omega_0^4 = 0$ Il existe deux solutions :

$$\Omega_1 = \omega_1^2 = \omega_0^2 \quad => \boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}}$$

$$\Omega_2 = \omega_2^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2 \quad => \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_0}$$

La solution générale sera la combinaison des deux modes propres

$$y_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$y_2(t) = B_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

<u>Calcul des rapports d'amplitudes</u>

Lorsque $\omega = \omega_1$ le système oscille dans le premier mode propre le système d'équation au-dessus nous donne

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_1^2)A_1 \quad - \quad \frac{\omega_0^2}{2}B_1 = 0 \\ -\frac{3}{4}\omega_0^2 A_1 \quad + \quad \left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega_1^2\right)B_1 = 0 \end{cases} ➔ \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}$$

Lorsque $\omega = \omega_2$ le système oscille dans le second mode propre. Le système d'équation au-dessus nous donne

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_1^2)A_2 \quad - \quad \frac{\omega_0^2}{2}B_2 = 0 \\ -\frac{3}{4}\omega_0^2 A_2 \quad + \quad \left(\frac{3}{4}\omega_0^2 - \omega_1^2\right)B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -1$$

$$y_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$y_2(t) = \frac{3}{2}A_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

A_1, A_2, ϕ_1 *et* $\phi_2)$ *sont des constantes à déterminer à partir des codnitions initilales.*

B/ On considère la figure 2

1°) *Une force* $F = F_0\cos(\omega t)$ *est appliquée au bord de la tige*

La fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha l^2 \dot{\theta}^2$ dûe à l'amortissement

Le système des deux équations différentielles devient

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + 2ky_1 - ky_2 = 0 \\ \frac{4}{3}m\ddot{y}_2 + \alpha\dot{y}_2 + ky_2 - ky_1 = 2F(t) \end{cases}$$

2°) F(t) sinusoïdale implique que $y\,, \dot{y}, \ddot{y}$ *sont* sinusoïdaux

$y = A\,e^{j\omega t}\,,\ \dot{y} = j\omega A\,e^{j\omega t} = j\omega y\,,\ \ddot{y} = -\omega^2 A\,e^{j\omega t} = -\omega^2 y = j\omega\dot{y}$

Les équations aux vitesses sont

$$\begin{cases} j\omega\dot{y}_1 + \dfrac{\omega_0^2}{2j\omega}\dot{y}_1 - + \dfrac{\omega_0^2}{2j\omega}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0 \\ j\omega\dot{y}_2 + 2\delta\dot{y}_2 + \dfrac{3\omega_0^2}{4j\omega}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = \dfrac{3F(t)}{2m} \end{cases}$$

3°) **Pour** $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, On remplace dans la première équation on a

$$\cancelto{0}{j\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} - \frac{\omega_0^2}{\frac{2\omega_0}{\sqrt{2}}}\right)\dot{y}} + \frac{\omega_0^2}{2j\omega_0}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0$$

$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{y}_2$, maintenant on remplaçant dans la deuxième équation on obtient

$$y_2(t) = \frac{3F(t)}{2m(2\delta + j\omega)} = \frac{3F_0}{2m(2\delta + j\omega)}\sin\omega t = y_1(t)$$

Comme $a + ib = a\,e^{ib}$ *on a*

$$\boxed{y_2(t) = \frac{3F_0}{2m\omega\sqrt{4\delta^2 - \omega^2}}\sin(\omega t + \phi)}$$

4°) La puissance moyenne à la manière du système électrique

$$P = e(t).i(t)$$
$$e(t) \Leftrightarrow F(t)$$
$$i(t) \Leftrightarrow \dot{y}(t)$$

$$P = F(t).\dot{y}(t) = \frac{9F_0^2}{4m^2\omega^2(4\delta^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi)$$