

Mouvement de rotation et masse en translation

Le système montré dans la figure a une fréquence naturelle de 5Hz pour les données suivantes. $m=10\text{Kg}$, $J_0=5 \text{ Kg m}^2$, $r_1=10\text{cm}$, $r_2=25\text{cm}$. Quand le système subit une perturbation qui lui donne un déplacement initial, l'amplitude de vibration libre est réduite de 80% en 10 périodes.

- Déterminer les valeurs de K et de α .

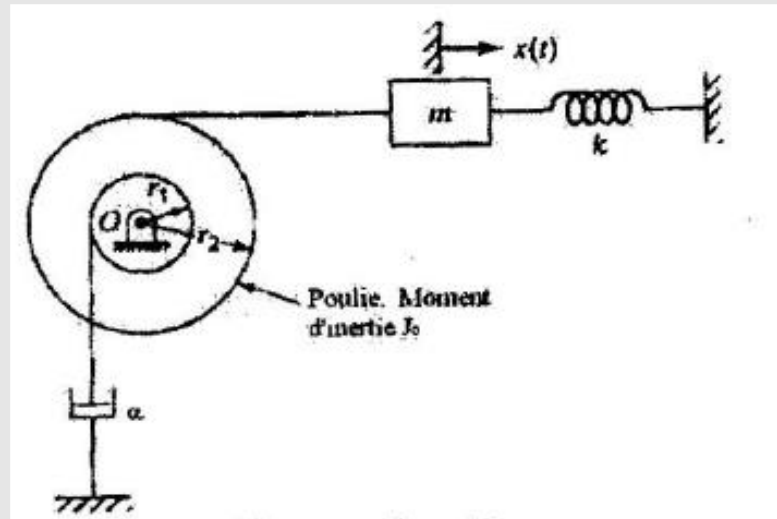
On rappelle que le décrétement logarithmique $D = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right)$

Hypothèses :

1-Oscillations de petites amplitudes

2-A l'équilibre le ressort est au repos

Et le disque est à la position $\vartheta=0$



Solution proposée par Mr OUATIZERGA -enseignant à l'USTHB

Système ressort et poulie en rotation sans déplacement et avec amortissement

Lorsque le disque tourne d'un angle θ , la masse effectue un déplacement $x = r_2 \theta$

L'énergie cinétique du système est $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$ avec $x = r_2 \theta$, $T = \frac{1}{2} (m r_2^2 + J_0) \dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle se réduit seulement à l'énergie potentielle élastique

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k r_2^2 \theta^2$$

Le lagrangien du système s'écrit alors $L = \frac{1}{2} (m r_2^2 + J_0) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k r_2^2 \theta^2$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\alpha r_1^2 \dot{\theta} \rightarrow (J_0 + m r_2^2) \ddot{\theta} + \alpha r_1^2 \dot{\theta} + k r_2^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha r_1^2}{(J_0 + m r_2^2)} \dot{\theta} + \frac{k r_2^2}{(J_0 + m r_2^2)} \theta = 0$$

AN. En utilisant les données : $\ddot{\theta} + 0.0018\alpha\dot{\theta} + 0.0112k\theta = 0$

Comme l'énoncé de l'exercice nous indique qu'il y a des oscillations, Le seul régime qui présente des oscillations est le régime pseudopériodique ; la solution de cette équation est donc de la forme :

$$\theta = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

La constante de raideur k :

On sait que $f_0 = 5\text{Hz}$, comme $\omega_0 = 2\pi f_0$ alors $\omega_0 = 31.41 \text{ rad.s}^{-1}$

De l'équation on tire : $\omega_0 = \sqrt{0.0112k}$ d'ou $k = \frac{\omega_0^2}{0.0112} \approx 8.8 \times 10^4 \text{ N.m}^{-1}$

La constante d'amortissement α :

Puisque l'amplitude est réduite de 80% en 10 périodes $\rightarrow X_{10} = 20\%$ de X_0

Le décrément logarithmique est donné par :

$$D_c = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{X_0}{X_{10}}\right) = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{X_0}{0.2X_0}\right) = \ln(5) = 0.1609 \quad \text{d'autre part nous savons que } D_c = \delta T_a$$

$$\text{Or } T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{d'ou } D_c = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{D_{ec}^2 \omega_0^2}{4\pi^2 + D_{ec}^2}} = 0.8045 \text{ s}^{-1}$$

$$\delta = 0.8045 \text{ s}^{-1} \text{ de l'équation on tire } \delta = \frac{0.0018 * \alpha}{2} \rightarrow \alpha = 2 * \frac{0.8045}{0.018} \approx 900 \text{ N.s.m}^{-1} ;$$

Fin