

Exercice 1: (1DL) (5 points).

Une poulie de moment d'inertie J_0 , constituée de deux disques homogènes de rayons respectifs (r) et $(2r)$ peut osciller sans frottement autour de l'axe de rotation fixe passant par son centre de gravité. Deux masses $m_1=m$ et $m_2=2m$ sont fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable et de longueur $2l$, soudée à la poulie. Cette poulie est reliée d'une part à une masse $m_3 = 2m$ par un fil inextensible et de masse négligeable, et d'autre part à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient visqueux α , fixés à un bâti fixe comme l'indique la figure 1. On suppose qu'à l'équilibre la tige est verticale ($\theta = 0$). On abandonne le système après l'avoir écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ suffisamment faible pour admettre les approximations des faibles angles.

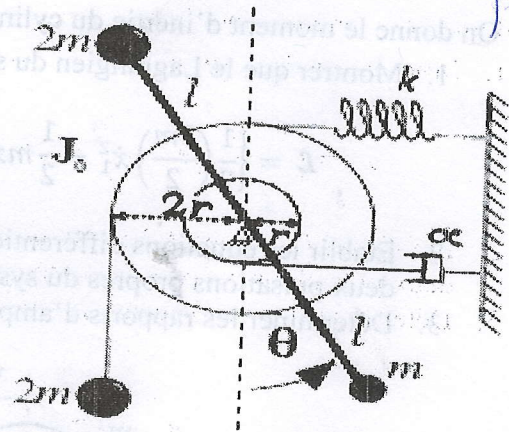


Figure 1

Pour un amortissement négligeable $\alpha = 0$.

- 1) Exprimer l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et le Lagrangien L du système en fonction de θ .
- 2) Etablir l'équation du mouvement en précisant l'expression de la pulsation propre ω_0 .
- 3) Pour un amortissement non nul $\alpha \neq 0$, trouver la nouvelle équation différentielle du mouvement (On précisera l'expression du coefficient d'amortissement δ) et donner l'expression de sa solution $\theta(t)$ en régime pseudo-périodique.

Sachant que à $t=0$ s $\theta(0) = \pi/36$ rad et $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s.

On donne :

$m = 3$ kg, $l = 0.5$ m, $r = 0.2$ m, $k = 5225$ N/m, $\alpha = 2463$ kg/s, $J_0 = 5$ kg.m² et $g = 10$ m/s².

Exercice 2: (1DL forcé) (5 points).

Une force harmonique de la forme

$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ est appliquée sur la masse m_2 du système précédent (Voir figure 2).

- 1) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- 2) Donner sa solution en régime permanent.
- 3) Pour $\Omega = \omega_0$, calculer le module de l'amplitude et le déphasage Φ entre la réponse du système et la force appliquée.

On donne : $F_0 = 200$ N

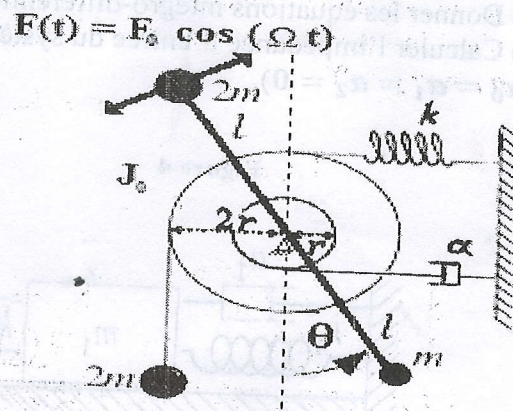


Figure 2

Exercice 3: (2DL libre) (5points).

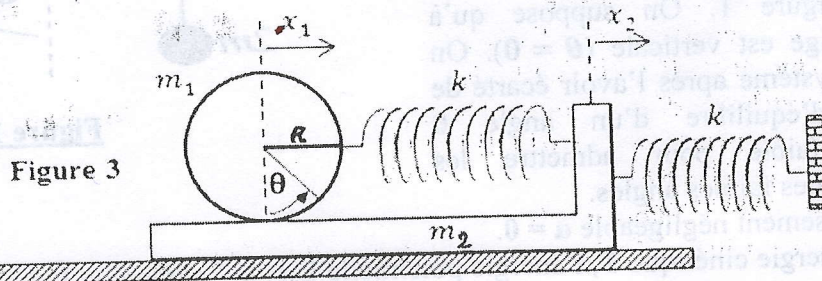
Un cylindre homogène de masse $m_1 = m$ et de rayon R peut rouler sans glisser au-dessus d'un plateau de masse $m_2 = 2m$ qui peut coulisser sur un bâti horizontal. Un premier ressort de raideur k relie l'axe du cylindre au plateau, lui-même relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un second ressort de raideur k . Ecarté de sa position d'équilibre puis relâché, le système effectue des oscillations de très faibles amplitudes. On décrit ce système à l'aide des deux coordonnées x_1 et x_2 . (Voir figure 3).

On donne le moment d'inertie du cylindre par rapport à son centre de gravité : $J_G = \frac{m R^2}{2}$.

1. Montrer que le Lagrangien du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3m}{2} \right) \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{5m}{2} \right) \dot{x}_2^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} k x_1^2 + k x_2^2 - k x_1 x_2 \right\}$$

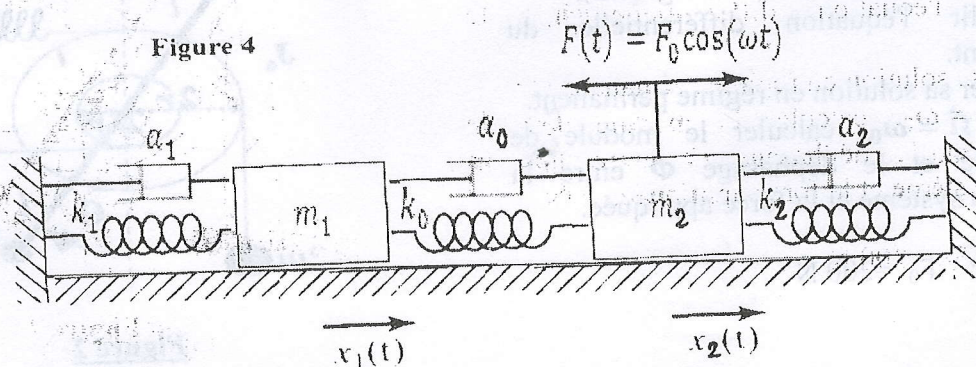
2. Etablir les équations différentielles du mouvement en x_1 et x_2 , puis déterminer les deux pulsations propres du système.
3. Déterminer les rapports d'amplitudes correspondant à ces pulsations propres.



Exercice 4: (2DL forcé) (5points).

Les deux masses du système de la figure 4 sont couplées par un ressort de raideur k_0 et par un amortisseur de coefficient visqueux α_0 . Deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 et deux amortisseurs de coefficients visqueux α_1 et α_2 relient les masses m_1 et m_2 à un bâti fixe. La masse m_2 est soumise à une force harmonique de la forme $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ comme l'indique la figure 4. x_1 et x_2 sont les déplacements horizontaux des deux masses m_1 et m_2 respectivement.

- 1) Etablir les équations différentielles du mouvement en fonction de x_1 et x_2 .
- 2) Donner les équations intégral-différentielles du mouvement.
- 3) Calculer l'impédance d'entrée du système dans le cas des faibles amortissements ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$).



EXERCICE 1 : (5 points)

Pour $\alpha=0$.

1- Les énergies du système

$$T_{sys} = \frac{1}{2}(J_0 + 3ml^2 + 8mr^2)\dot{\theta}^2, \quad 0.5$$

$$U_{sys} = 2kr^2\theta^2 - mgl\frac{\theta^2}{2} \quad 0.5$$

2- Equation différentielle du mouvement

$$(J_0 + 3ml^2 + 8mr^2)\ddot{\theta} + (4kr^2 - mgl)\theta = 0 \quad 0.5$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{(4kr^2 - mgl)}{(J_0 + 3ml^2 + 8mr^2)} \quad 0.5$$

Pour $\alpha \neq 0$ $D = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2 \quad 0.5$

L'équation du mouvement devient : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\delta = \frac{\alpha r^2}{2(J_0 + 3ml^2 + 8mr^2)} \quad 0.5$

Sa solution en régime pseudo-périodique est : $\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_A t + \varphi)$ avec $\omega_A^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad 0.5$

A.N. $\omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \delta = 6 \text{ s}^{-1}, \omega_A = 8 \text{ rad/s} \quad 0.5$

D'après les conditions initiales, on obtient : $A = 0.035\pi \text{ rad} = 0.11 \text{ rad}$ et $\varphi = -0.64 \text{ rad} \quad 0.5$

EXERCICE 2 : (5 points)

1- Equation du mouvement $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \check{F} \cos(\Omega t)$ avec $\check{F} = \frac{lF_0}{(J_0 + 3ml^2 + 8mr^2)} \quad 1$

2- La solution en régime permanent est : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t + \Phi) \quad 1$

3- avec $\theta_0 = \frac{\check{F}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \quad 0.5$ et $\tan\Phi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad 0.5$

4- Pour $\omega_0 = \Omega$ (à la résonance) $\theta_{max} = lF_0/(\alpha r^2 \omega_0) \quad 0.5$
A.N.

$\theta_{max} = 0.1 \text{ rad}$ et $\Phi = -\pi/2 \text{ rad} \quad 0.5$

0.5