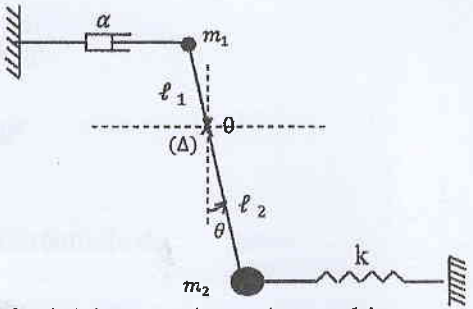
USTHB L2-ST
Vibrations & Ondes Mécaniques

Examen de Rattrapage (Juin 2017)

Exercice 1 : 1DL (5points)

Un pendule constitué d'une **tige de masse négligeable**, portant à ses deux extrémités deux masses $m_1$et m_2 et pouvant tourner autour d'un axe (Δ) passant par un point O. Les masse m_1 et m_2 sont reliées respectivement à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (figure ci-dessous).

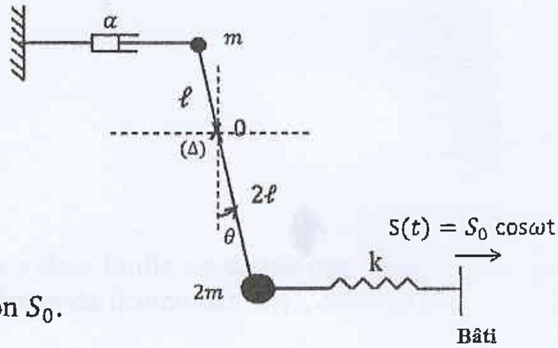
1/Ecrire le Lagrangien L du système ainsi que sa fonction de dissipation D_{iss} .
En déduire l'équation différentielle du mouvement. Préciser l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur d'amortissement δ du système.



2/ Par la suite, on prendra $\ell_2 = 2\ell_1 = 2\ell$, et $m_2 = 2m_1 = 2m$
Le pendule étant vertical à l'équilibre avec le ressort non déformé, on l'écarte d'un angle θ_0(petit) et on l'abandonne sans vitesse initiale.
Déterminer la valeur limite du coefficient de frottement visqueux α pour que la nature du mouvement du pendule soit non vibratoire.
Ecrire l'expression de la réponse $\theta(t)$.

3/ Le mouvement du pendule étant maintenant vibratoire avec une période de 0.16 s. Au bout de combien d'oscillations, l'amplitude initiale est atténuée de 30% ?

On donne : α =54 N.s/m, m=1kg, k=3500 N/m, $\ell = 50cm$, g=10m/s^2
Pour la suite (Exercice 2) on utilisera ces valeurs.



Exercice 2 : 1DL forcé (5 points)

Le bâti du système précédent est maintenant animé d'un mouvement sinusoïdal $S(t) = S_0 \cos\omega t$ (voir figure) .

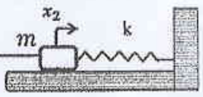
1/ Etablir l'équation différentielle du mouvement.

2/ Donner la réponse $\theta(t)$ en régime permanant.

3/ Trouver l'amplitude de la déviation maximale du pendule en fonction S_0.

Exercice 3 : 2DL libre (5 points)

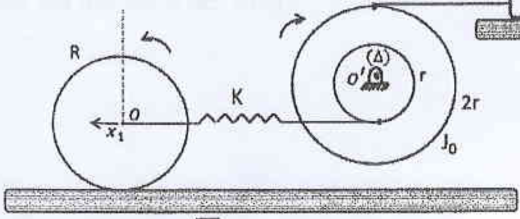
Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-dessous. Le cylindre de masse M et de rayon R peut rouler sans glissement sur le plan horizontal. Il est relié à une poulie de moment d'inertie J_0 par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K . La poulie peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) passant par son centre o'. Une masse m accrochée à un ressort de raideur k est reliée à la poulie par un fil inextensible.



1.Monter que le lagrangien du système s'écrit :

$$L_{sys} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x_2}^2 + \frac{3}{2}\dot{x_1}^2\right) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}.\frac{5}{4}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1x_2$$

Avec : $m + \frac{J_0}{4r^2} = M$ et $K = k$



2.Etablir les équations différentielles du mouvement en déplacement x_1 et x_2 .

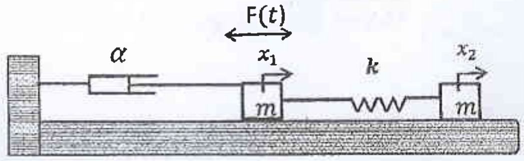
3.Déterminer les pulsations propres ω_{01} et ω_{02} en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et le rapport d'amplitudes dans chaque mode. Ecrire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 4 : 2DL forcé (5 points)

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. Sur la première masse agit une force horizontale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude F_0. Les deux masses sont identiques.

1/ Etablir les équations différentielles pour les coordonnées x_1(t) et x_2(t) des deux masses. En déduire les équations intégro-différentielles du mouvement.

2/ En utilisant la notation complexe, déterminer l'impédance mécanique d'entrée Ze = F / $\dot{x}_1$. Que vaut cette impédance pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$? Conclure.



3/ En utilisant l'analogie électro-mécanique, donner le schéma du circuit électrique équivalent au système mécanique.

USTHB, Faculté de Physique L2-ST
L2-ST, VOM

Corrigé de l'examen de Rattrapage (Juin 2017)

Exercice 1 : 1DL (5points)

$\boxed{2}$ 1/ Les énergies cinétique et potentielle s'écrivent :

$T = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2})\dot{\theta}^2$ 0.25 , $U_k = \frac{1}{2}k\ell_2^{\,2}\theta^2$ 0.25 , $U_g = (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g\frac{\theta^2}{2}$ 0.25

D'où le lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2})\dot{\theta}^2 - (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g\frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2}k\ell_2^{\,2}\theta^2$$

La fonction de dissipation est : $D_{iss} = \frac{1}{2}\alpha\ell_1^{\,2}\dot{\theta}^2$ 0.25

L'équation de Lagrange étant: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$ d'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha\ell_1^{\,2}}{m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2}}\dot{\theta} + \frac{[k\ell_2^{\,2} + (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g]}{m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2}}\theta = 0$$ 0.5

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{[k\ell_2^{\,2} + (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g]}{m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2}}}$ 0.25 et $\delta = \frac{\alpha\ell_1^{\,2}}{2(m_1\ell_1^{\,2} + m_2\ell_2^{\,2})}$ 0.25

$\boxed{2}$ 2/ $\ell_2 = 2\ell_1 = 2\ell$, et $m_2 = 2m_1 = 2m$ d'où :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{[4k\ell + 3\,mg]}{9m\ell}}$, et $\delta = \frac{\alpha}{18m}$

Le mouvement va cesser d'être vibratoire dès que $\delta \geq \omega_0$ d'où la valeur limite est donné par: $\delta_{\ell im} = \omega_0$ 0.25 correspondant à un mouvement en régime critique avec un coefficient de frottement $\alpha_{\ell im}$ donné par :

$\alpha_{\ell im} = 18m\omega_0$ 0.25

$\omega_0 = \sqrt{\frac{[4(3500)0{,}5 + 3\,(1)10]}{9(1)0{,}5}} = 39{,}46\,rd/s$ 0.25 d'où : $\alpha_{\ell im} = 710{,}31\,N.s/m$ 0.25

La réponse est donnée par : $\theta(t) = e^{-\delta_{\ell im}t}(C_1 + C_2t)$ 0.5

Utilisant les conditions initiales: $\theta(t) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, nous avons :

$\theta(t) = \theta_0(1 + 39{,}46t)e^{-39{,}46t}$ 0.5

$\boxed{1}$ 3./ nombre d'oscillations au bout desquelles, l'amplitude est atténuée de 30% :

Sachant que : $D_{ec} = \delta T_a = \frac{1}{n}\ln\frac{X_i}{X_f}$ 0.5 d'où : $n = \frac{\ln\frac{X_i}{X_f}}{\delta T_a}$

$\delta = \frac{\alpha}{18m} = \frac{67}{18(1)} = 3{,}72\,s^{-1}$ 0.25 ; $n = \frac{\ln\frac{1}{70\%}}{3{,}72(0{,}16)} \cong$ 0.25

Exercice 2 : 1DL forcé (5points)

$\boxed{2}$ 1/ $U_k = \frac{1}{2}k(s - 2\ell\theta)^2$ 0.5 , l'équation de Lagrange étant: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$ 0.25 ,l'équation différentielle du mouvement devient: $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^{\,2}\theta = \frac{2k}{9m\ell}S_0\cos\omega t$ 0.25 1

$\boxed{1}$ 2/ En régime permanent, la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ 0.25 où : $A(\omega) = \frac{\frac{2k}{9m\ell}S_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$ 0.5 0.25

$\boxed{2}$ 3/ L'amplitude de la déviation maximale est obtenue à la pulsation de résonance : $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ 0.5

d'où : $\theta_{max} = A(\omega_R) = \frac{\frac{2k}{9m\ell}S_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\frac{2(3500)}{9(1)0{,}5}S_0}{2(3{,}72)\sqrt{39{,}46^2 - 3{,}72^2}} = 5{,}32S_0$ 0.5 0.5 0.5

Exercice 3 : 2DL libre (5points)

2 1/ L'équation différentielle du mouvement:

$T_{cyl} = \frac{1}{2}J_{01}\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^{\,2} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}M\dot{x}_1^{\,2}$ avec $x_1 = R\theta_1$

$T_{poulie} = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_2^{\,2} = \frac{1}{2}M\frac{\dot{x}_2^{\,2}}{4r^2}$ avec $x_2 = 2r\theta_2$, $T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^{\,2}$, $U_k = \frac{1}{2}K(x_1 - r\theta_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^{\,2}$

Posant : $m + \frac{J_0}{4r^2} = M$ et $K = k$

Nous avons : $L_{sys} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_2^{\,2} + \frac{3}{2}\dot{x}_1^{\,2}\right) - \frac{1}{2}kx_1^{\,2} - \frac{1}{2}.\frac{5}{4}kx_2^{\,2} + \frac{1}{2}kx_1x_2$ 1

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_i}\right) - \frac{dL}{dx_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1,2)$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}M\ddot{x}_1 + kx_1 - \frac{1}{2}kx_2 = 0 \quad 0.5\\ M\ddot{x}_2 + \frac{5}{4}kx_2 - \frac{1}{2}kx_1 = 0 \quad 0.5\end{cases}$$ qui devient : $$\begin{cases}\left(\omega_0^2 - \frac{3}{2}\omega^2\right)x_1 - \frac{1}{2}\omega_0^2x_2 = 0\\ -\frac{1}{2}\omega_0^2x_1 + \left(\frac{5}{4}\omega_0^2 - \omega^2\right)x_2 = 0\end{cases}$$

1.5 2/ Le système admet une solution (x_1, x_2) si son déterminant est nul :

$$Det = 12\omega^4 - 23\omega_0^2\omega^2 + 8\omega_0^4 = 0 \quad 0.5$$

D'où les pulsations propres données par : $\omega_{01,02}^2 = \frac{23 \mp \sqrt{145}}{24}\omega_0^2$,

soit $\omega_{01} = 0{,}676\omega_0$ et $\omega_{02} = 1{,}208\omega_0$ 0.5

1.5 3/ Sachant que : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\left(\omega_0^2 - \frac{3}{2}\omega^2\right)}{\frac{1}{2}\omega_0^2}$ 0.5 le rapport d'amplitudes dans chaque mode est donné par :

$R_1 = 0.629$, $R_2 = -2{,}380$ 0.5

D'où la solution générale :

$$\begin{cases}x_1(t) = A_1\cos(\omega_{01}t + \Psi_1) + A_2\cos(\omega_{02}t + \Psi_2)\\ x_2(t) = 0.629A_1\cos(\omega_{01}t + \Psi_1) - 2{,}380A_2\cos(\omega_{02}t + \Psi_2)\end{cases} \quad 0.5$$

Exercice 4 : 2DL forcé (5points)

2 1/ $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{x}_2^{\,2}) - \frac{1}{2}k(x_2^{\,2} - x_1^{\,2})$, $D_{iss} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^{\,2}$ 0.5

Les équations différentielles pour x_1 et x_2 :

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_1}\right) - \frac{dL}{dx_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 + \alpha\dot{x}_1 = F \quad 0.25\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_2}\right) - \frac{dL}{dx_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \quad 0.25\end{cases}$$

D'où les équations intégro-différentielles :

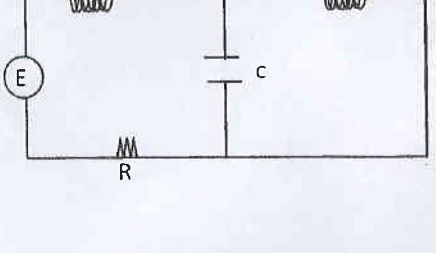
$$\begin{cases}m\frac{d}{dt}\dot{x}_1 + k\int \dot{x}_1\,dt - k\int \dot{x}_2\,dt + \alpha\dot{x}_1 = F \quad 0.5\\ m\frac{d}{dt}\dot{x}_2 + k\int \dot{x}_2\,dt - k\int \dot{x}_1\,dt = 0 \quad 0.5\end{cases}$$

2 2/ Equations aux vitesses en utilisant la notation complexe : $\dot{x}_1 = \tilde{A}\,e^{j\omega t}$, $\dot{x}_2 = \tilde{B}\,e^{j\omega t}$ et posant : $\omega_0^2 = k/m$

$$\begin{cases}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\alpha}{m}j\omega\right)\dot{x}_1 - \omega_0^2\dot{x}_2 = j\omega\frac{F}{m} \quad 0.5\\ -\omega_0^2\dot{x}_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\dot{x}_2 = 0 \quad 0.5\end{cases}$$ d'où $Z_e = \frac{F}{\dot{x}_1} = \alpha + \frac{j}{\omega}m\left[\frac{\omega_0^4 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]$ 0.5, ou bien: $Z_e = \alpha + j\frac{\left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k}{\omega}\right)^2\right]}{\left(m\omega - k/\omega\right)}$

Pour $\omega = \omega_0$ nous avons $Z_e = \infty$ 0.25 d'où $\dot{x}_1 = 0$ ce qui signifie que ω_0 est une pulsation d'anti-résonance. 0.25

1 3/ Schéma équivalent dans l'analogie electro-mécanique : $F(t) \Leftrightarrow E(t)$, $m \Leftrightarrow L$, $\alpha \Leftrightarrow R$, $k \Leftrightarrow \frac{1}{c}$, $\dot{x} \Leftrightarrow i$ d'où :



1