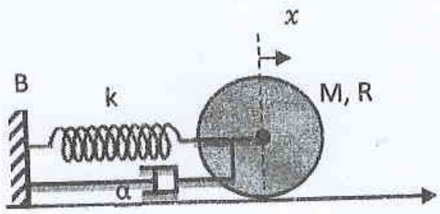
Epreuve Rattrapage (durée : 1h30)

Exercice 1 : Oscillateur libre à 1 degré de liberté (5 points)

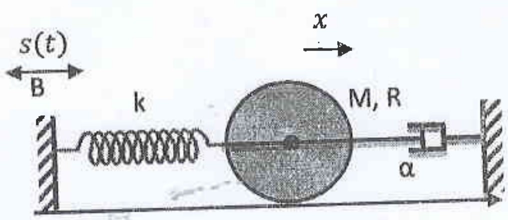


Un cylindre de masse M et de rayon R, est relié à un bâti fixe B par l'intermédiaire d'un ressort attaché à son centre de masse. Le cylindre peut rouler sans glissement sur un tapis (voir figure ci-contre). Les frottements sont modélisés par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α comme indiqué sur la figure ci-contre. Le cylindre est écarté de 5cm par rapport à sa position d'équilibre puis lâché sans vitesse initiale.

1. Trouver l'expression du lagrangien L du système ainsi que la fonction de dissipation D.
2. Etablir l'équation de mouvement du cylindre. Donner les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur d'amortissement δ.
3. Quel est le régime d'oscillation ? Déterminer alors l'expression de x(t) en tenant compte des conditions initiales.

On donne : $m = 5\ kg,\ k = 60\ N/m\ et\ \alpha = 60\ kg.s/m$

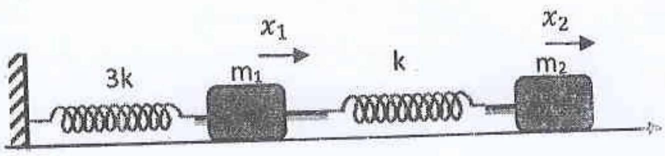
Exercice 2 : Oscillateur forcé à 1 degré de liberté (5 points)



Le système précèdent est modifié comme indiqué sur la figure ci-contre.
Le bâti B est soumis maintenant à un déplacement horizontal sinusoïdal de la forme : $s(t) = s_0 \cos\omega t\ \ avec\ \ s_0 = 5\ cm$

1. Déterminer l'équation du mouvement du cylindre en fonction de x.
2. Trouver la réponse x(t) du système. Quelle est son expression en régime permanent en fonction des paramètres : $\omega_0,\ \delta\ et\ s_0$.
3. Exprimer la pulsation de résonance ? Que peut-on conclure pour cet oscillateur ?

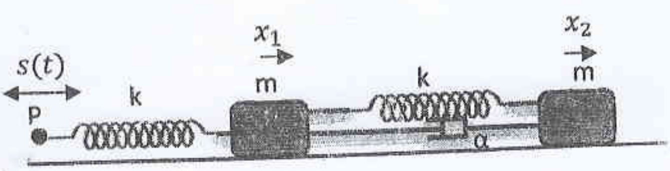
Exercice 3 : Oscillateur libre à 2 degrés de liberté (5 points)



Deux masses ponctuelles m_1 et $m_2 = 2m_1$ sont reliées par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. La masse m_1 est aussi reliée à un bâti fixe à l'aide d'un ressort de raideur 3k. Les deux masses peuvent se déplacer sur un tapis horizontalement sans frottement (voir figure). Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

1. Etablir les équations différentielles de mouvement qui régissent les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2. Trouver les deux pulsations propres $\omega_1\, et\ \omega_2$ du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Déterminer le rapport des amplitudes des oscillations des masses pour chaque mode d'oscillation. Ecrire les solutions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 4 : Oscillateur forcé à 2 degrés de liberté (5 points)



Soit le système représenté sur la figure ci-contre. Il est constitué de deux masses ponctuelles identiques de masse m, de deux ressort de constante de raideur k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Les deux masses peuvent se déplacer sur un plan horizontal. On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ leurs positions respectives par rapport à leur position d'équilibre.
L'extrémité P du ressort est animée d'un mouvement horizontal représenté par le déplacement $S(t) = S_0 \sin\omega t$.

1. Déterminer le lagrangien L du système ainsi que la fonction de dissipation D.
2. Etablir les équations différentielles du mouvement pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
3. Trouver les expressions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en régime permanent (utiliser la formulation des nombres complexes)

SOLUTION

Exercice 1 :

1. L'équation de mouvement : $L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad et \quad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$ (1.5)
2. L'équation de mouvement : $3m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 2kx = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = 2\sqrt{2}\, m.s^{-1} \quad et \quad \delta = \frac{\alpha}{3m} = 4\, s^{-1}$ (2)

   Il s'agit du apériodique, donc : $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad avec\ \boldsymbol{r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$ (1.5)

   $$\rightarrow \boldsymbol{x(t) = -e^{-6.8t}} + 6e^{-1.2t}$$

Exercice 2 :

1. $L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x-s)^2 \rightarrow 3m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 2kx = 2ks_0 \cos \omega t$ (2)
2. La réponse : $\mathrm{x(t)} = \boldsymbol{6e^{--6.8t}} - e^{-1.2t} + X\cos(\omega t + \phi)$

   En régime permanent : $x(t) = \frac{\omega_0^2 s_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \Phi)$ avec $\Phi = \mathrm{atan}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ (2)
3. La pulsation de résonnance :

   $$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad : comme\ \delta > \omega_0 \quad il\ n'existe\ pas\ de\ résonance\ pour\ cet\ oscillateur$$ (1)

Exercice 3 :

1. $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{3}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$ (1)

   $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$
2. Les pulsations propres **(2)** $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

   $$\begin{cases} (4\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - 2\omega^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow 2\omega^4 - 9\omega_0^2\omega^2 + 3\omega_0^4 = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{9-\sqrt{57}}}{2}\omega_0 \ \ et\ \omega_2 = \omega_1 = \frac{\sqrt{9+\sqrt{57}}}{2}\omega_0$$
3. Les solutions **(2)**

   $$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = \mu_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \mu_2 A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad les\ rapports \quad \begin{matrix} \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = 3.64 \\ \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -0.14 \end{matrix}$$

Exercice 4 :

1. Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - s)^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \ \ et\ \ D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$ (1.5)
2. Les équations de mouvement :(1.5)

   $$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 - kx_2 = ks_0 \sin\, \omega t \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 - kx_1 = 0 \end{cases}$$
3. Les solutions en régime permanent : (2) On pose : $x_1 \rightarrow \bar{A}_1 e^{i\omega t} \quad et\ x_2 \rightarrow \bar{A}_2 e^{i\omega t} \quad et\ \sin\omega t \rightarrow -ie^{i\omega t}$

   $$\begin{cases} (2k - \omega^2 m + i\alpha\omega)x_1 - (k + i\alpha\omega)x_2 = -iks_0 \\ -(k + i\alpha\omega)x_1 + (k - \omega^2 m + i\alpha\omega)\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

   $$\bar{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} -iks_0 & -(k + i\alpha\omega) \\ 0 & 2k - 2m\omega^2 i\alpha\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m + i\alpha\omega & -(k + i\alpha\omega) \\ -(k + i\alpha\omega) & k - \omega^2 m + i\alpha\omega \end{vmatrix}} = \frac{-iks_0(2k - 2m\omega^2 i\alpha\omega)}{(k - 2m\omega^2 + i\alpha\omega)(k - \omega^2 m + i\alpha\omega) - k^2}$$

   $$\bar{A}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m + i\alpha\omega & -iks_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m + i\alpha\omega & -(k + i\alpha\omega) \\ -(k + i\alpha\omega) & k - \omega^2 m + i\alpha\omega \end{vmatrix}} = \frac{ik^2 s_0}{(k - 2m\omega^2 + i\alpha\omega)(k - \omega^2 m + i\alpha\omega) - k^2}$$