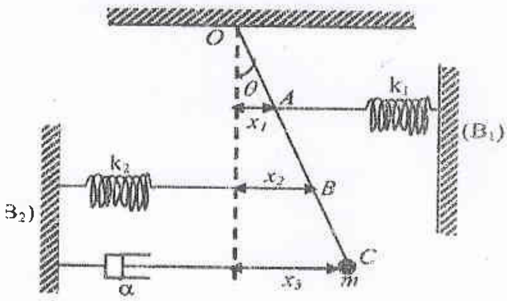
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Physique 3 (V O M), Rattrapage, le Jeudi 10 Mars 2022

Exercice 1 : Système libre à un degré de liberté

La figure montre le mouvement d'une masse m, fixée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable, qui peut tourner autour du point O. Deux ressorts et un amortisseur sont reliés à la tige aux points A, B et C respectivement, tel que :

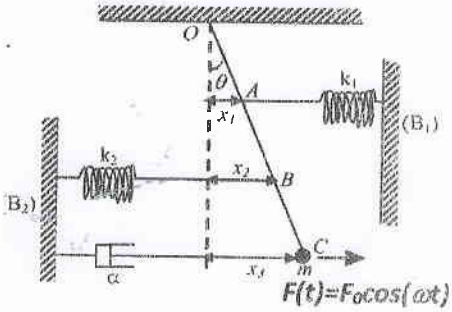
$OA=l/3$ et $OB=2l/3$.



1. Ecrire l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et le lagrangien L du système.
2. Trouver l'équation différentielle du mouvement. Préciser le coefficient d'amortissement et la pulsation propre du système.
3. Déterminer la solution de l'équation du mouvement pour le système faiblement amorti.
   Préciser la pseudo-pulsation.

Exercice 2 : Système forcé à un degré de liberté

On considère le système précédent et on applique une force sinusoïdale **$F(t)= F_0 \cos(\omega t)$** à la masse **m** dans le sens du mouvement comme indiqué sur la figure.

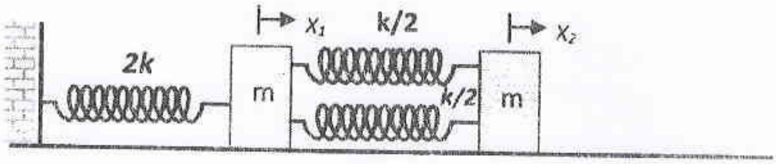


1. Trouver dans ce cas l'équation différentielle du mouvement
2. Donner la solution en régime permanent en précisant son amplitude et sa phase.
3. Exprimer la pulsation de résonnance pour ce système.

Exercice 3 : Système libre à deux degrés de liberté

Deux masses identiques sont reliées (voir la figure) par des ressorts identiques sans masses de raideur k. L'ensemble peut se déplacer horizontalement sans frottement.

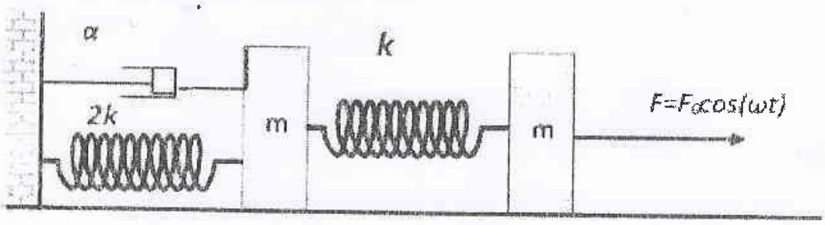
Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux masses sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.



1. Etablir les équations différentielles du mouvement qui régissent les deux masses.
2. Trouver les deux pulsations propres ω_1 *et* ω_2 du système en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
3. Déterminer les rapports d'amplitude et déduire les expressions des solutions $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$.

Exercice 4 : Système forcé à deux degrés de liberté

On considère le système précédent et on lui applique une force et un amortisseur :



1. Etablir les équations différentielles du mouvement.
2. En déduire les équations aux vitesses.
3. Donner le circuit électrique équivalent.

Solution du Rattrapage du Jeudi 10 Mars 2022

Pour horizont

Exercice 1 :

1. L'énergie cinétique : $T=\frac{1}{2}(ml^2)\,\dot{\theta}^2$; l'énergie potentielle : $U=\frac{1}{2}\,k_1(\frac{l}{3})^2\,\theta^2+\frac{1}{2}\,k_2(\frac{2l}{3})^2\,\theta^2$

   Le Lagrangien s'écrit : $L=T-U=\frac{1}{2}(m\,l^2)\,\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}\,k_1(\frac{l}{3})^2\,\theta^2-\frac{1}{2}\,k_2(\frac{2l}{3})^2\,\theta^2$

2. L'équation du mouvement : on a $D=\frac{1}{2}(\alpha\,l^2)\,\dot{\theta}^2$ et $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=0$

   d'où : $\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta}+(\frac{k1}{9m}+\frac{4k_2}{9m})\theta=0$ avec : $\omega_0=\sqrt{\frac{k1}{9m}+\frac{4k_2}{9m}}$ et $\delta=\frac{\alpha}{2m}$.

3. La réponse pour les faibles amortissements : $\theta(t)=Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t+\phi)$

   La pseudo pulsation : $\omega_a=\sqrt{\omega_\circ^{\,2}-\delta^2}=\sqrt{\frac{(k_1+4k_2)}{9m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}$

Exercice 2 :

1. l'équation différentielle du mouvement devient :

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\ell\,F(t)$ d'où : $\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta}+(\frac{k1}{9m}+\frac{4k_2}{9m})\theta=\frac{F_\circ\cos(\omega t)}{ml}$

2. La solution en régime permanent :

$\Theta_p(t)=\theta_0(\omega)\cos(\omega t+\phi(\omega))$ avec : $\Theta_0(\omega)=\frac{F_\circ/ml}{\sqrt{(\omega_\circ^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2}}$ et $\phi(\omega)=\mathrm{Arctg}\,(\frac{-2\delta\omega}{\omega_\circ^{\,2}-\omega^2})$

3. La pulsation de résonance : $\omega_R=\sqrt{\omega_\circ^2-2\delta^2}=\sqrt{\frac{k_1+4k_2}{9m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}}$

Exercice 3 :

1. Les équations différentielles du mouvement :

$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$

Les équations de Lagrange : $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases}$ donnent :

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+3kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2+kx_2-kx_1=0\end{cases}$$

2. Les pulsations propres : En divisant les équations de mouvement par m et les solutions sinusoïdales étant du type : $\begin{cases}x_1=A\cos(\omega t+\phi)\\ x_2=B\cos(\omega t+\phi)\end{cases}$ on obtient :

$$\begin{cases}(3\omega_0^2-\omega^2)x_1-\omega_0^2x_2=0\\ (\omega_0^2-\omega^2)\,x_2-\omega_0^2x_1=0\end{cases}$$

Le déterminant qui doit être nul, donne l'équation aux valeurs propres :

$$\left[\begin{array}{c}(3\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-\omega^2)-\omega_0^4=0\\ \omega^4-4\omega_0^2\omega^2+2\omega_0^4=0\end{array}\right.$$

Les deux solutions admises sont :

$$\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0=0.76\omega_0 \qquad et\quad \omega_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0=1.84\omega_0$$

3. Les rapports d'amplitudes : on a $\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t + \phi) \\ x_2 = B\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$

dans l'équation : $(\omega_0^2 - \omega^2)\, x_2 - \omega_0^2\, x_1 = 0$

donne : $\mu = \frac{B}{A} = \frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega^2}$ d'où : $\begin{cases} \mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = 2{,}42 & \text{pour } \omega = \omega_1 \\ \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\,0{,}38 & \text{pour } \omega = \omega_2 \end{cases}$

Les expressions générales des solutions sont alors :

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\ \omega_1 t + \phi_1 \ + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

et deviennent : $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \emptyset_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \emptyset_2)$

$$x_2 = \mu_1 A_1\cos(\omega_1 t + \emptyset_1) + \mu_2 A_2\cos(\omega_2 t + \emptyset_2) = 2{,}42\, A_1\cos(\omega_1 t + \emptyset_1) - 0{,}38\, A_2\cos(\omega_2 t + \emptyset_2)$$

Exercice 4 :

1. Les équations différentielles du mouvement : à partir de l'exercice précédent, on ajoute la force et la fonction de dissipation D aux équations de Lagrange : $D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot{x}_1^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F(t) \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + 2kx_1 + \alpha\dot{x}_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = F_0\cos(\omega t) \end{cases}$$

2

2. Les équations aux vitesses : Les solutions permanentes sont de la même forme que la force

$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t + \phi) \\ x_2 = B\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$ ici on utilise la notation cpmplexe $\begin{cases} x_1 = Ae^{i(\omega t + \phi_1)} = \bar{A}e^{i\omega t} \\ x_2 = Be^{i(\omega t + \phi_2)} = \bar{B}e^{i\omega t} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = i\omega x_1 \rightarrow x_1 = \frac{\dot{x}_1}{i\omega} \quad et\ \ddot{x}_1 = i\omega\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = i\omega x_2 \rightarrow x_2 = \frac{\dot{x}_2}{i\omega} \quad et\ \ddot{x}_2 = i\omega\dot{x}_2 \end{cases}$$

on obtient :

2

$$\begin{cases} \left(\frac{3\omega_\circ^2}{i\omega} + i\omega + \alpha\right)\dot{x}_1 - \left(\frac{\omega_\circ^2}{i\omega}\right)\dot{x}_2 = 0 \\ \left(i\omega + \frac{\omega_\circ^2}{i\omega}\right)\dot{x}_2 - \left(\frac{\omega_\circ^2}{i\omega}\right)\dot{x}_1 = Fe^{i\omega t} \end{cases} \quad \text{et enfin} \quad \begin{cases} (3\omega_\circ^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)\dot{x}_1 - \omega_\circ^2\dot{x}_2 = 0 \\ (\omega_\circ^2 - \omega^2)\dot{x}_2 - \omega_\circ^2\dot{x}_1 = i\omega\, Fe^{i\omega t} \end{cases}$$

3. le circuit électrique équivalent :