

La variable généralisée est la variable y régissant le mouvement de la masse m .

La variable y_1 est la coordonnée du centre de la roue, c'est la fonction de la trajectoire suivie par la roue $y_1(x)$.

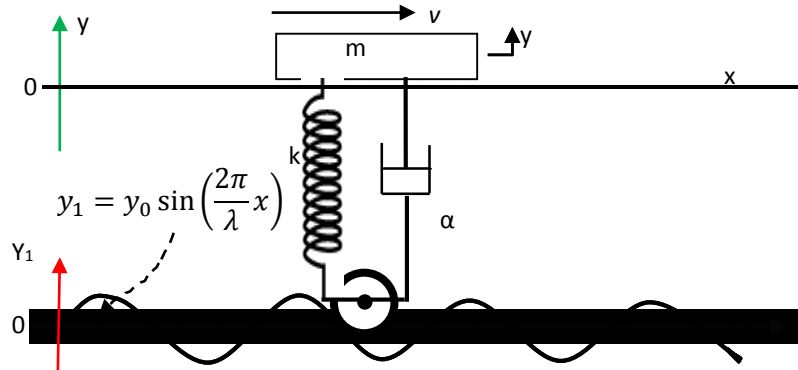
Sachant que le véhicule suit horizontalement une trajectoire rectiligne avec une vitesse v , donc $x = vt$ et que $v = \frac{\lambda}{T}$ ou λ est la longueur parcouru par la roue pendant la période T . rappelons que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'ou

$$y_1 = y_0 \sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda} t\right) \rightarrow y_1 = y_0 \sin(\omega t) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2, E_p = \frac{1}{2} k (y - y_1)^2, D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{y} - \dot{y}_1)^2$$

Dans l'équation de Lagrange régissant le mouvement de m , on ne prend en compte que les forces appliquées la masse.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$$



$$m\ddot{y} + k(y - y_1) = -\alpha(\dot{y} - \dot{y}_1) \text{ Qui devient } \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{\alpha}{m}\dot{y}_1 + \frac{k}{m}y_1$$

Si on pose $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ on obtient :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 2\delta\dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1$$

Qui est une équation différentielle de second ordre. La solution générale est de la forme $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

La solution particulière est de la même forme que le second membre de l'équation différentielle c'est-dire sinusoïdale $y_p = Y \cos(\omega t + \Phi)$. Cette fonction est solution de l'équation différentielle.

Il est avantageux ici d'utiliser la représentation complexe pour résoudre cette équation.

Pour la représentation complexe on effectue les correspondances suivantes :

$y = Y \cos(\omega t + \Phi)$	$\longrightarrow$	$Y e^{i(\omega t + \Phi)}$
$\dot{y}$	$\longrightarrow$	$i\omega Y e^{i(\omega t + \Phi)}$
$y_1 = y_0 \sin(\omega t) = y_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$\longrightarrow$	$y_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = y_0 e^{i\omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i y_0 e^{i\omega t}$
$\dot{y}_1 = y_0 \omega \cos(\omega t)$	$\longrightarrow$	$\omega y_0 e^{i\omega t}$

Après substitution on obtient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega) Y e^{i(\omega t + \Phi)} = (2\delta\omega - i\omega_0^2) y_0 e^{i\omega t}$$

Après simplification on a :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega) Y e^{i\Phi} = (2i\delta\omega - i\omega_0^2) y_0$$

$$\text{Soit } \bar{Y} = Y e^{i\Phi} = \frac{(\omega_0^2 - 2i\delta\omega) y_0}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)}, Y = |\bar{Y}| \text{ et } \Phi = \text{Arg}(\bar{Y})$$

On trouve :

$$Y = y_0 \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\delta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = y_0 \sqrt{\frac{1 + \gamma^2/Q^2}{(1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2/Q^2}} \text{ avec } \gamma = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } Q = \frac{2\delta}{\omega_0}$$

Et

$$\Phi = \text{Arg}(\bar{Y}) = \text{Arctan}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

La réponse du système est donc :

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \Phi), \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}, y_0 =$$

On remarque que si $\gamma \gg 1$

$$Y = \frac{y_0}{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \gamma^2/Q^2}{1 + 1/Q^2}}$$

Ce qui veut dire $Y \ll y_0$. La suspension sera donc plus efficace lorsque $\omega \gg \omega_0$ c'est - à - dire $v \nearrow$