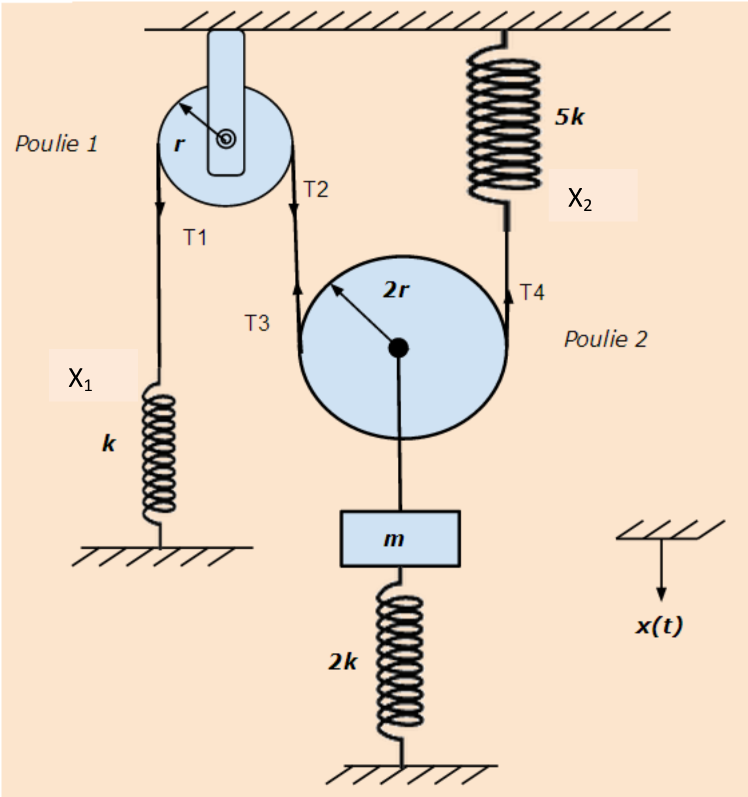
Exercice 5 de la série II année 2014: Trouver l'équation de mouvement du système schématisé dans la figure ci-contre.



Solution proposée par Mr OUATIZERGA

Lorsque la masse m se déplace d'une distance x par rapport à la position d'équilibre la poulie 2 effectue une rotation et un déplacement. Le déplacement total d'un point de la périphérie est égal à 2x au total.

La somme des déplacements des deux ressorts haut droite et bas gauche est égal à:

x_1(gauche) + x_2(droite) =2 x (1)

Comme les deux poulies sont supposées de masses nulles la tension appliquée à un point quelconque du fil sera la même :

T_1= kx1, T1 = T2 =T3 = T4 T4=5kx2

→ $x_1 = 5x_2$ (2)

De (1) et (2) nous avons $3x_2 = x$ → $x_2 = x/3$ (l'élongation du ressort droite) et $x_1 = 5x/3$ (l'élongation du ressort 2).

Trouvons maintenant l'équation du mouvement de la masse m en utilisant le formalisme de Lagrange.

$$T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}^2$$

La déformation initiale du ressort due au poids de la masse m est annulée par l'effet l'énergie potentielle gravitationnelle.

$$U = \frac{1}{2}(2k)x^2 + \frac{1}{2}(k)\left(\frac{5x}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(5k)\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2}\left(2k + \frac{25k}{9} + \frac{5k}{9}\right)x^2 = \frac{8}{3}kx^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{8}{3}kx^2$$

L'équation de Lagrange :

$$m\ddot{x} + \frac{8}{3}kx = 0 \rightarrow x + \omega^2 x = 0 \;\; avec\; \omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$