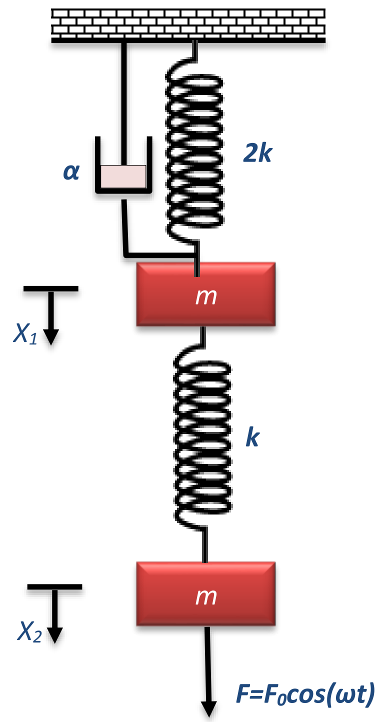
Traitement d'un système forcé



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = F_0\cos(\omega t) \end{cases} \qquad I$$

On trouve :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_0 + kx_2 - kx_1 = F_0\cos(\omega t) \end{cases} \qquad II$$

La solution de ce système forcé (à 2DDL) est de la frome :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1H} \\ x_{2H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{pmatrix}$$

Au régime permanent la solution est de même forme que la force appliquée.

$$\begin{cases} x_1 = x_{1p} = Acos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = x_{2p} = Bcos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

Ou ω est la pulsation d'excitation de la force appliquée.

Il est plus pratique d'utiliser ici la notation complexe. on introduit deux nombres complexes z1 et z2 dont x1 et x2 sont les parties réels.

$$z_1 = Ae^{i(\omega t + \phi_1)} = Ae^{i\phi_1}e^{i\omega t} = \overline{A}e^{i\omega t}$$

De même

$$z_2 = Be^{i(\omega t + \phi_2)} = Be^{i\phi_2}e^{i\omega t} = \overline{B}e^{i\omega t}$$

On remplace dans le système d'équations différentielles on trouve :

$$\begin{cases} (3k - \omega^2 m + i\alpha)z_1 - kz_2 = 0 \\ (k - m\omega^2)z_2 - \ kz_1 = F \end{cases} \qquad III$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $(facultatif\ )\ afin\ de\ simplifier\ les\ écritures.on\ obtient$

$$\begin{cases} (3\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{i\alpha}{m})z_1 - \omega_0^2 z_2 = 0 \\ -\omega_0^2 z_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)z_2 = \dfrac{F}{m} \end{cases} \qquad IV$$

Ce système possède une solution si le déterminant est différent de 0.

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -\omega_0^2\\ F & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}) & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}}=\frac{\omega_0^2F_0e^{i\omega t}}{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)(\omega_0^2-\omega^2)-\omega_0^4}$$

$$z_2=\frac{\begin{vmatrix}(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}) & 0\\ -\omega_0^2 & F\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}) & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2-\omega^2)\end{vmatrix}}=\frac{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)F_0e^{i\omega t}}{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)(-\omega^2-\omega_0^4)-\omega_0^4}$$

D’où les amplitudes :

$$\begin{cases}\bar{A}=\dfrac{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)F_0}{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)(-\omega^2-\omega_0^4)-\omega_0^4} & et\ donc\ A=|\bar{A}|\quad et\ \phi_1=Arg(\bar{A})\\ \bar{B}=\dfrac{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)F_0}{\left(3\omega_0^2-\omega^2+\frac{i\alpha}{m}\right)(-\omega^2-\omega_0^4)-\omega_0^4} & et\ B=|\bar{B}|\quad et\ \ \phi_2=Arg(\bar{B})\end{cases}$$

Les équations intégro différentielles et calcul des impédances d’entrée et de transfert… A suivre